

公路桥梁动力学

宋一凡

编著



人民交通出版社

Gonglu Qiaoliang Dongli Xue

公路桥梁动力学

宋一凡 编著

人民交通出版社

图书在版编目(CIP)数据

公路桥梁动力学/宋一凡编著. —北京:人民交通出版社,2000
ISBN 7-114-03574-8

I.公… II.宋… III.公路桥—桥梁结构—结构动力学 IV.U448.141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 10061 号

公路桥梁动力学

宋一凡 编著

版式设计:周 国 责任校对:张 捷 责任印制:张 凯

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号 010 64216602)

各地新华书店经销

北京鑫正大印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:9.625 字数:250 千

2000 年 6 月 第 1 版

2000 年 6 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数:0001—3000 册 定价:18.00 元

ISBN 7-114-03574-8

U·02576

内 容 提 要

本书全面介绍了公路桥梁动力学的理论解析方法,同时也介绍了公路桥梁抗震设计理论。主要包括:梁桥振动,拱桥振动,悬索桥振动,斜拉桥振动,桥梁冲击系数和抗震设计理论。

本书可作为公路桥梁工程专业研究生教学参考书,也可供从事公路桥梁工程专业教学、研究和设计人员参考。

前 言

公路桥梁动力学是现代公路桥梁发展的一个重要课题。一方面它能更真实地揭示出桥梁结构在汽车车辆荷载作用下的动态受力与变形本质,另一方面又能描述出桥梁结构在地震作用下的系统响应。因此,公路桥梁动力学已被列为公路桥梁工程专业研究生必修的一门学位课程,同时也是现代公路桥梁设计与施工技术人员的重要理论工具。尽管结构有限元等数值分析方法已相当普及,但作为描述公路桥梁结构内在本质的理论解析方法,对于建立现代公路桥梁结构动力分析模型和指导模型试验仍然具有相当重要的理论意义。本书以理论解析方法为基础并结合现代桥梁结构分析的有限元等数值方法编写,具有较强的理论性和实用性。

全书共分六章。第一章详细介绍了公路梁桥结构的动力特性与系统响应分析和弹塑性动力分析方法;第二章介绍了拱桥结构的动力特性分析方法;第三章介绍了悬索桥结构动力特性分析方法;第四章主要介绍了斜拉桥拉索的动力特性与索力动测原理和斜拉桥结构动力分析方法;第五章介绍了公路桥梁结构冲击系数概念和确定冲击系数的方法;第六章主要介绍了公路桥梁地震振动与地震响应分析方法,同时也介绍了公路桥梁结构抗震设计理论。

本书是作者广泛收集了国内外有关文献资料,连同作者近年来为公路桥梁工程专业硕士研究生教学讲义和科研成果一起编著而成。在编著过程中,作者得到了众多同事的大力协助并参考了大量文献,不论书末是否列出,在此一并致谢。为了本书的出版,编辑、校对付出了辛勤劳动,在此表示衷心感谢。

限于作者水平,书中难免还会有缺点,请读者批评指正。

作 者

1999年10月

目 录

第一章 梁桥振动	1
1.1 梁桥的振动方程	2
1.1.1 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的弯曲振动方程	2
1.1.2 轴向受力梁的弯曲振动方程	4
1.1.3 铁木辛柯(Timoshenko)梁的弯曲振动方程	6
1.2 梁桥的弯曲固有振动	10
1.2.1 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的弯曲固有振动	10
1.2.2 轴向受力梁的弯曲固有振动	17
1.2.3 铁木辛柯(Timoshenko)梁的弯曲固有振动	20
1.2.4 振型的正交性	22
1.2.5 连续梁的弯曲固有振动	27
1.2.6 带有集中质量梁的弯曲固有振动	34
1.3 梁桥固有振动分析的近似方法	38
1.3.1 能量法	38
1.3.2 等代梁法	47
1.3.3 加权残值法	48
1.4 带阻尼的梁桥弯曲固有振动	49
1.4.1 固有阻尼	50
1.4.2 附加阻尼	53
1.4.3 带阻尼的梁桥弯曲固有振动	54
1.5 定位激励力作用下梁桥的强迫振动	59
1.5.1 无阻尼梁的强迫振动	59
1.5.2 有阻尼梁的强迫振动	67

1.6 梁桥的车辆强迫振动	74
1.6.1 匀速移动常量力的作用	75
1.6.2 匀速移动简谐力的作用	81
1.6.3 匀速滚动质量的作用	86
1.6.4 匀速移动弹簧—质量的作用	88
1.6.5 匀速移动双轴汽车荷载的作用	94
1.7 梁桥的弹塑性动力分析	102
1.8 钢筋混凝土梁的动刚度分析模型	105
1.8.1 直接加载模型	106
1.8.2 弹性加载模型	108
1.9 预应力钢梁桥的动刚度分析	113
1.9.1 预应力索张拉后组合钢梁的平衡方程	114
1.9.2 组合钢梁桥的固有振动方程	116
第二章 拱桥振动	121
2.1 拱桥的静力平衡方程	122
2.1.1 圆弧拱的平面挠曲平衡方程	122
2.1.2 抛物线拱的平面挠曲平衡方程	125
2.1.3 拱桥的空间弯扭平衡方程	129
2.2 拱桥的固有振动	135
2.2.1 圆弧拱的平面挠曲固有振动	135
2.2.2 抛物线拱的平面挠曲固有振动	138
2.2.3 拱的平面挠曲固有振动反对称基频的近似计算	145
2.2.4 拱的侧向弯扭固有振动	150
2.3 拱桥的车辆强迫振动	157
2.3.1 匀速移动的简谐力的作用	157
2.3.2 匀速移动双轴汽车荷载的作用	161
2.4 拱桥的弯扭强迫振动	163
第三章 悬索桥振动	168
3.1 悬索桥的平面弯曲固有振动	168
3.1.1 静力平衡方程	168

3.1.2 振动方程	171
3.1.3 固有振动	172
3.1.4 近似计算	173
3.2 悬索桥的扭转固有振动	175
3.3 悬索桥施工猫道的固有振动	178
3.3.1 猫道的固有振动	178
3.3.2 近似计算	181
3.4 悬索桥的车辆强迫振动	182
第四章 斜拉桥振动	189
4.1 斜拉索的振动特性	189
4.1.1 水平张紧索的横向固有振动	189
4.1.2 斜拉索的横向固有振动	194
4.2 用振动法估测斜拉索拉力的实用公式	202
4.2.1 频率方程的近似解	203
4.2.2 计算斜拉索拉力的实用公式	210
4.3 斜拉索的自激共振	212
4.3.1 两自由度自激共振模型	212
4.3.2 斜拉索的自激共振分析	215
4.4 斜拉索的减振	219
4.5 斜拉桥的固有振动	224
4.5.1 漂浮体系固有振动频率的近似计算	225
4.5.2 铅垂平面内弯曲基频的近似计算	226
4.5.3 扭转固有振动频率的近似计算	230
4.6 斜拉桥的车辆强迫振动	232
第五章 桥梁冲击系数	236
5.1 桥梁冲击系数概念	237
5.2 桥梁动态荷载试验	239
5.2.1 实验方法	239
5.2.2 固有频率统计分析	240
5.2.3 桥梁阻尼统计分析	241

5.2.4 动态增量分析	242
5.3 公路桥梁设计规范中的冲击系数	244
第六章 桥梁结构的地震振动与地震反应分析	247
6.1 桥梁震害与抗震设计方法	247
6.1.1 桥梁震害	247
6.1.2 抗震设计方法	249
6.2 桥梁主要地震振动及其力学图式	258
6.2.1 梁桥的水平地震振动	258
6.2.2 拱桥的水平地震振动	263
6.3 梁桥地震振动方程	265
6.3.1 梁桥平面挠曲地震振动方程	265
6.3.2 梁桥横向水平地震振动方程	268
6.4 拱桥地震振动方程	269
6.4.1 拱桥平面挠曲地震振动方程	269
6.4.2 拱桥横向水平地震振动方程	270
6.5 桥梁按弹性反应谱理论的地震力简化计算	271
6.5.1 梁桥的地震力简化计算	272
6.5.2 单孔拱桥的地震力简化计算	273
6.6 确定性的桥梁地震反应分析	278
6.6.1 多自由度体系地震振动方程	279
6.6.2 选择合适的地震记录和输入模式	281
6.6.3 地震振动方程的计算方法	283
6.7 长、大桥梁多点激振及行波效应	284
6.7.1 多点激振的桥梁地震振动	285
6.7.2 考虑行波效应地震反应的振型叠加法	286
6.8 地基与基础的相互作用模型	288
附录 I 拉格朗日(Lagrange)方程	291
附录 II 哈密尔顿(Hamilton)原理	293
附录 III 公路桥梁动力学解法一览	296
参考文献	297

第一章 梁桥振动

梁桥是公路桥梁工程中最常用的一种桥型。同时,它又是其他体系桥梁动力分析的基础。本章介绍的梁桥振动分析方法,同样可以用于其他体系桥梁的振动分析。

由结构动力学知识可知,采用结构的离散坐标体系提供了一个方便而实用的方法,可对任意结构的动力响应进行分析。但是,所得到的解答只能是近似解。增加自由度的数目虽然可以使计算结果的精度达到所要求的程度,但是对于具有连续分布特性的真实结构,原则上要取无限多个自由度才可以收敛于精确解。因此,用有限个离散坐标的方法求精确解是不可能的。

描述多自由度体系的振动方程是常微分方程组。显然,描述具有连续分布特性的真实结构的振动方程应该是偏微分方程。在研究梁桥竖向振动特性时,可不考虑桥宽的影响,而简化为一维结构,即梁的质量、刚度等物理性质可用单一的、沿梁轴线的位置来描述,振动方程中只包含两个独立变量——时间 t 和沿梁轴线的距离 x 。

建立梁桥振动方程的力学原理常用的有达朗伯(D'Alembert)原理、拉格朗日(Lagrange)方程和哈密尔顿(Hamilton)原理。前者是后两者的基础,是动力学的普遍原理。拉格朗日方程对于多自由度体系振动分析较方便,哈密尔顿原理则经常用于连续的真实桥梁结构振动分析。本章主要用哈密尔顿原理建立梁桥的振动微分方程。

公路梁桥大多采用钢筋混凝土或预应力混凝土结构,其材料特性和梁的抗弯刚度与外力作用有关。本章未简要地介绍了钢筋混凝土梁桥与预应力钢梁桥动刚度分析的最近研究成果。

1.1 梁桥的振动方程

1.1.1 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的弯曲振动方程

图 1-1 表示一变截面的简单支承初等梁, 抗弯刚度为 $EI(x)$, 单位长度的质量为 $m(x)$, 假定不计梁横向剪切变形的影响和阻尼的作用, 在 xy 对称面内的横向荷载 $p(x, t)$ 的作用下, 梁产生自静平衡位置计起的动挠度 $y(x, t)$, 以向下为正。

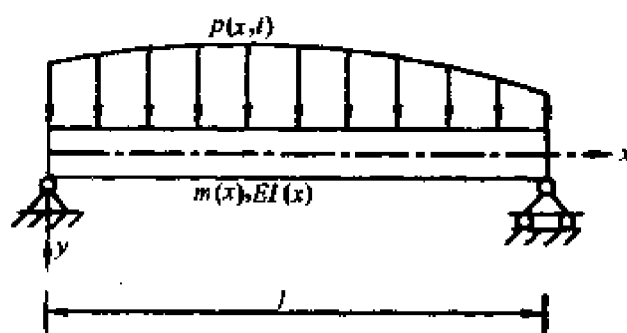


图 1-1 初等梁

梁在振动时的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx$$

梁在振动时的位能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

根据哈密尔顿原理, 有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (1-1)$$

其中, 动能的变分为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l m(x) \dot{y} \delta \dot{y} dx dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l m(x) \ddot{y} \delta y dx dt + \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} m(x) \frac{\partial}{\partial t} (\dot{y} \delta y) dt dx
\end{aligned}$$

由于在 t_1, t_2 瞬时的运动已经给定, 因此, 上式中

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{y} \delta y) dt = (\dot{y} \delta y) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

位能的变分为

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} V dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI(x) y'' \delta y'' dx dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y'']' \delta y' dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y'' \delta y']' dx dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y'']'' \delta y dx dt - \int_{t_1}^{t_2} [EI(x) y'']' \delta y \Big|_0^l dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} EI(x) y'' \delta y' \Big|_0^l dt
\end{aligned}$$

式(1-1)的第二部分为除弹性力以外的主动力所做的虚功之和, 其中作用在梁上的分布荷载 $p(x, t)$ 在梁虚位移 δy 上做的虚功为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_p dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l p(x, t) \delta y dx dt \quad (1-2a)$$

作用在梁的两端的弯矩 M_0, M_1 和剪力 Q_0, Q_1 在对应的梁端虚位移上所做的虚功为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_s dt = \int_{t_1}^{t_2} (M_0 \delta y_0' - M_1 \delta y_1' - Q_0 \delta y_0 + Q_1 \delta y_1) dt \quad (1-2b)$$

式中, 梁端力的正方向规定同材料力学。

将式(1-2)两式相加并和动能、位能的变分代入式(1-1), 得

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ [EI(x) y'']'' + m(x) \ddot{y} - p(x, t) \} \delta y dx dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI(x)y'']' |_1 + Q_1 \} \delta y_1 dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI(x)y'']' |_0 + Q_0 \} \delta y_0 dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [EI(x)y'' |_1 + M_1] \delta y'_1 dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} [EI(x)y'' |_0 + M_0] \delta y'_0 dt
\end{aligned} \tag{1-3}$$

由于在边界上 $\delta y_0, \delta y'_0, \dots$ 等变分对于位移边界条件是等于零的, 而对于力的边界条件则是任意的, 要使式(1-3)成立, 必须满足以下各式

$$\int_0^l \{ -m(x)\ddot{y} - [EI(x)y'']'' + p(x, t) \} \delta y dx = 0 \tag{1-4}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \{ [EI(x)y'']' |_0 + Q_0 \} \delta y_0 = 0 \\
& [EI(x)y'' |_0 + M_0] \delta y'_0 = 0 \\
& \{ [EI(x)y'']' |_1 + Q_1 \} \delta y_1 = 0 \\
& [EI(x)y'' |_1 + M_1] \delta y'_1 = 0
\end{aligned} \right\} \tag{1-5}$$

由于变分 δy 在域内是任意的, 因此从式(1-4)就可以得到梁的横向振动方程为

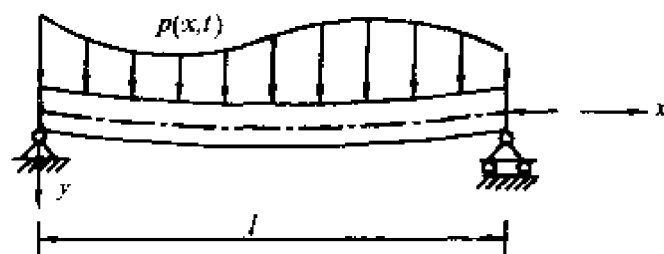
$$m(x)\ddot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] = p(x, t) \tag{1-6}$$

上式实际上表示动力平衡方程, 也即用达朗贝尔原理, 将惯性力 $-m(x)\ddot{y}$ 加到外荷载项后即可求得。式(1-6)就是艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁最初等的弯曲振动方程。

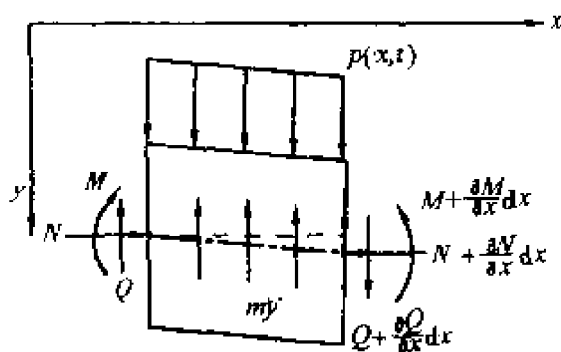
对于初等梁(Euler 梁), 式(1-5)显然必然满足, 从式(1-5)可以得到梁两端力的边界条件。为方便起见, 在以后梁的振动方程推导中不再引入梁端力所做的虚功项。

1.1.2 轴向受力梁的弯曲振动方程

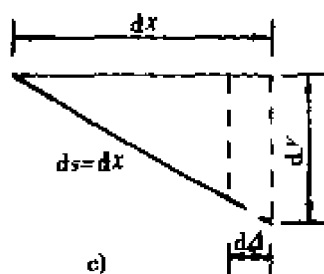
图 1-2 所示梁, 除了受到横向荷载 $p(x, t)$ 作用以外, 还受有



a) N 为常量



b) $N=N(x, t)$



c)

图 1-2 轴向受力的初等梁

轴向外力 $N(x, t)$ 的作用。由于梁轴线弯曲变形, N 的作用点发生改变, 假设梁轴线变形前后其长度不变, 只是在平面上的位置发生变化, 则在微元三角形中(图 1-2c), 有

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 = (dy)^2 + (dx - d\Delta)^2 \\ &= (dy)^2 + (dx)^2 - 2dx d\Delta + (d\Delta)^2 \end{aligned}$$

略去上式中高阶微量 $(d\Delta)^2$, 则

$$d\Delta \approx \frac{(dy)^2}{2dx} = \frac{dy}{2dx} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

式中, $d\Delta$ 为微元上 N 的作用点在梁弯曲变形后的轴向位移。于是, 轴向力 N 在梁上所做的功为

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l N(x, t) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (1-7a)$$

横向荷载 $p(x, t)$ 所做的功为

$$W_P = \int_0^l p(x, t) y(x, t) dx \quad (1-7b)$$

将式(1-7)两式相加并和动能、位能的变分代入式(1-1), 得

$$\int_1^2 \int_0^l \{ -m(x) \ddot{y} - [EI(x) y'']' - [N(x, t) y']' + p(x, t) \} \delta y dx dt = 0$$

由于 δy 为任意的, 故有轴向力作用下梁的振动方程为

$$m(x) \ddot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + \frac{\partial}{\partial x} [N(x, t) \frac{\partial y}{\partial x}] = p(x, t) \quad (1-8)$$

上式也可以按图 1-2b 利用达朗贝尔原理得到。

当轴向力 N 为常量时, 即艾勒尔—柏努利梁受到常量轴向力 N 作用时, 式(1-8)可简化为

$$m(x) \ddot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (1-9)$$

比较式(1-6)和式(1-9), 显然可见, 轴向力和梁弯曲曲率的乘积形成了作用在梁上的附加有效横向荷载。

1.1.3 铁木辛柯(Timoshenko)梁的弯曲振动方程

对于高跨比很大的深梁来说, 就必须计及梁的横向剪切变形和转动惯量的影响, 从而给出一个高阶理论, 由此而求得的结果可以用来估计相应的梁用初等理论的计算精度和适用范围。

图 1-3 表示了梁剪切变形和转动惯量的影响。

设梁的动挠度 $y(x, t)$ 为

$$y(x, t) = y_b(x, t) + y_s(x, t) \quad (1-10)$$

式中, $y_b(x, t)$ 由弯曲所引起, $y_s(x, t)$ 剪切所引起。对上式求导后, 有

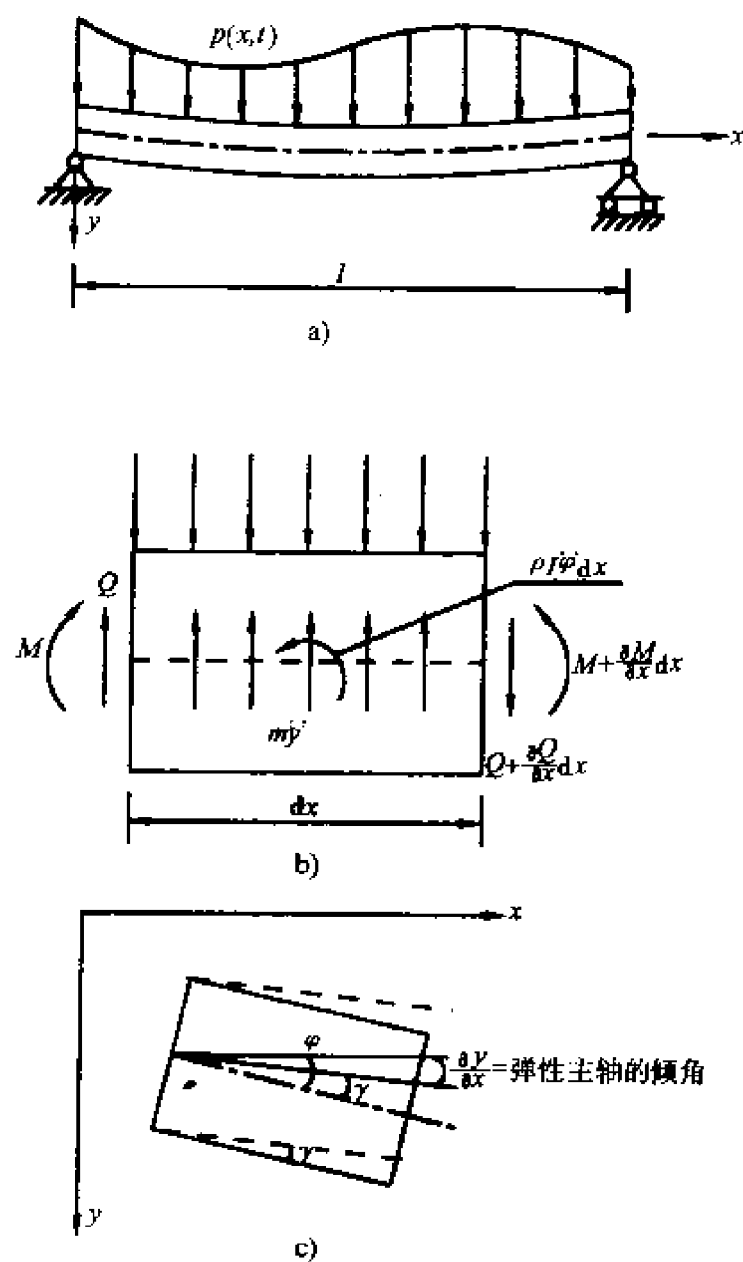


图 1-3 铁木辛柯(Timoshenko)梁

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial y_b}{\partial x} + \frac{\partial y_s}{\partial x} = \varphi - \gamma \quad (1-11)$$

式中, $\varphi = \frac{\partial y_b}{\partial x}$, $\gamma = -\frac{\partial y_s}{\partial x}$, φ 和 γ 分别表示弯曲和剪切转角(见图 1-3c)。由图 1-3b 可得弯矩动平衡方程

$$M + Qdx - (M + \frac{\partial M}{\partial x}dx) - \rho I \ddot{\varphi} dx = 0$$

即

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q - \rho I \ddot{\varphi} \quad (1-12a)$$

剪力动平衡方程

$$(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx) - Q + p(x, t)dx - m\ddot{y}dx = 0$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = m\ddot{y} - p(x, t) \quad (1-12b)$$

式中, $\rho = m/A$ 为单位体积的质量, I 为横截面的惯性矩。

由材料力学可知

$$\left. \begin{aligned} M &= -EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Q &= -kGA\gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中, 系数 k 通常定义为整个截面上的平均剪应变 (Q/AG) 与中心点处剪应变之比, 它依赖于截面形状, 严格地说, 取决于振动模态。对于矩形截面一般可取 $k \approx 5/6$, 其它截面的 k 可参考有关文献。

梁的动能和位能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \dot{\varphi}^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kGA \gamma^2 dx$$

外力功为

$$W = \int_0^l p(x, t) y(x, t) dx$$

将上述三式代入式(1-1), 并引入式(1-11), 得

$$\frac{1}{2} \int_0^l \int_0^t \delta \{ m \dot{y}^2 + \rho I \dot{\varphi}^2 - EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \} dx dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l p(x, t) \delta y dx dt = 0$$

对上式经过多次分部积分后,并注意到 $\delta y|_{t_1} = \delta y|_{t_2} = 0$ 以及 $\delta \varphi|_{t_1} = \delta \varphi|_{t_2} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ -m\ddot{y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[kAG \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] + p(x, t) \right\} \delta y dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\rho I \ddot{\varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \delta \varphi dx dt = 0 \end{aligned} \quad (1-14)$$

因为 δy 和 $\delta \varphi$ 的任意性,故有振动方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] + m\ddot{y} &= p(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \rho I \ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

如果讨论等截面梁, EI 和 kGA 均为常数,并注意到 $I = Ar^2$, 其中 r 为横截面惯性矩半径。由式(1-15)的第一式得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{KGA} [p(x, t) - m\ddot{y}] \quad (1-16)$$

将式(1-15)第二式对 x 求导,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] + \rho I \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial x} \\ &= p(x, t) - m\ddot{y} + mr^2 \frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial x} \end{aligned}$$

将式(1-16)代入上式,整理得

$$\begin{aligned} & \left[EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\ddot{y} - p(x, t) \right] - mr^2 \frac{\partial^2 \ddot{y}}{\partial x^2} + \frac{EI}{kGA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [p(x, t) - m\ddot{y}] \\ & - \frac{mr^2}{kGA} [\ddot{p}(x, t) - m \frac{\partial^4 y}{\partial t^4}] = 0 \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中,左边第一项为艾勒尔—柏努利梁的振动项,第二项为转动惯量影响项,第三项为剪切变形影响项,第四项为转动惯量与剪切变形的混合影响项。式(1-17)就是著名的铁木辛柯(Timoshenko)梁

的振动方程。

对于更一般的变截面梁,应从式(1-15)联立求解。

1.2 梁桥的弯曲固有振动

1.2.1 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的弯曲固有振动

在式(1-6)中,令 $p(x, t) = 0$ 且当 EI 与 m 均为常量时,则有

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\ddot{y} = 0 \quad (1-18)$$

这是一个常系数的线性齐次偏微分方程,可用变量分离法求解,令

$$y(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (1-19)$$

代入式(1-18),则有

$$EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} q(t) + m\ddot{q}(t)\varphi(x) = 0$$

或

$$\frac{\varphi^{(4)}(x)}{\varphi(x)} + \frac{m}{EI} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = 0 \quad (1-20)$$

因为上式的第一项仅是 x 的函数,第二项仅是 t 的函数,所以只有每一项都等于一个常数时,对于任意的 x 和 t ,式(1-20)才能满足,即

$$\frac{\varphi^{(4)}(x)}{\varphi(x)} = C = -\frac{m}{EI} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} \quad (1-21)$$

由振动学可知, C 是个正实数,即令 $C = \alpha^4$,式(1-21)可分成

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - \alpha^4 \varphi(x) &= 0 \\ \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

式中

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{m} \text{ 或 } \alpha^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (1-23)$$

由式(1-22)的第二式,得方程的解为

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1-24)$$

上式中, C_1 和 C_2 (或 A 和 θ) 是常数, 可由梁振动的初始条件确定。

令 $\varphi(x) = Be^{\alpha x}$, 代入式(1-22)的第一式, 有

$$(r^4 - a^4)Be^{\alpha x} = 0$$

由此可得

$$r_{1,2} = \pm a, r_{3,4} = \pm ia$$

把上述四个根代入式 $\varphi(x) = Be^{\alpha x}$, 得

$$\varphi(x) = B_1 e^{iax} + B_2 e^{-iax} + B_3 e^{ax} + B_4 e^{-ax}$$

用三角函数及双曲函数表示为

$$\varphi(x) = A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax \quad (1-25)$$

上式中的四个常数 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 由边界条件确定。

对于梁桥来说, 一般的边界条件为

$$\left. \begin{array}{ll} 1. \text{简支端} & \varphi = 0, \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \\ 2. \text{固定端} & \varphi = 0, \frac{d\varphi}{dx} = 0 \\ 3. \text{自由端} & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0, \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = 0 \end{array} \right\} \quad (1-26)$$

除了上面几种比较简单的边界条件之外, 还可能有其它一些更复杂的边界条件。图 1-4a 表示了梁端部有质量块、线约束弹簧和转动约束弹簧, 其中 $\bar{M}$ 、 J 、 k 和 K 分别表示梁端部质量块的质量、质量块的转动惯量、线约束弹簧和转动约束弹簧的刚度。脚标 L 和 R 分别表示梁的左端和右端。由图 1-4b 可写出梁右端的边界条件方程为

$$\begin{aligned} M_B &= J_R \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + K_R \frac{\partial y}{\partial x} \\ Q_B &= -(\bar{M}_R \ddot{y} + k_R y) \end{aligned}$$

由材料力学, $M = -EIy''$ 和 $Q = -EIy'''$ 可得

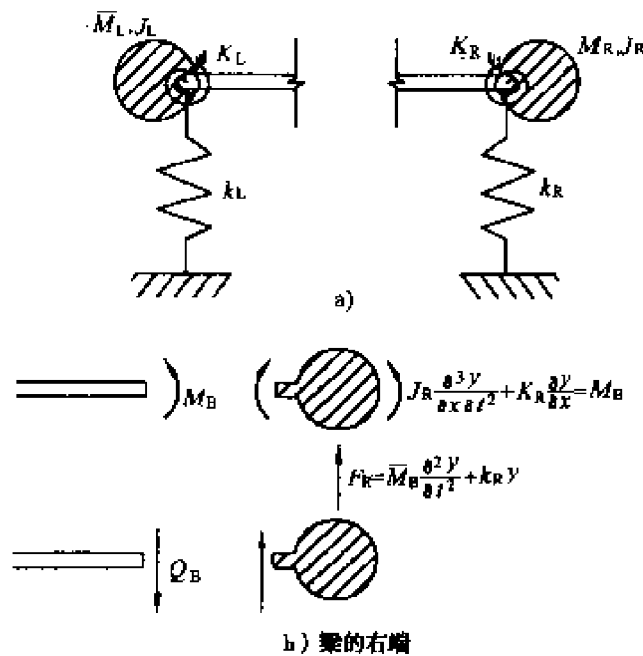


图 1-4 复杂边界条件

$$\left. \begin{aligned} EI \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_{x=1} &= (\omega^2 J_R - K_R) \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=1} \\ EI \left(\frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right)_{x=1} &= (-\omega^2 \bar{M}_R + k_R) \varphi_{x=1} \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

同理,对于梁的左端有

$$\left. \begin{aligned} EI \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_{x=0} &= (\omega^2 J_L - K_L) \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0} \\ EI \left(\frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right)_{x=0} &= -(-\omega^2 \bar{M}_L + K_L) \varphi_{x=0} \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

例 1.2.1 等截面简支梁的固有振动分析。

已知梁振型函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x$$

且

$$\varphi'(x) = \alpha (A_1 \cos \alpha x - A_2 \sin \alpha x + A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)$$

$$\varphi''(x) = \alpha^2 (-A_1 \sin \alpha x - A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \text{即 } A_2 + A_4 = 0 \\ \varphi''(0) &= 0, \text{即 } -A_2 + A_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

得 $A_2 = A_4 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(l) &= 0, \text{即 } A_1 \sin al + A_3 \sinh al = 0 \\ \varphi''(l) &= 0, \text{即 } -A_1 \sin al + A_3 \sinh al = 0 \end{aligned} \right\}$$

上两式相加,得

$$2A_3 \sinh al = 0$$

因此,必有 $A_3 = 0$ 。上两式相减为

$$2A_1 \sin al = 0$$

由于 A_1 不能再为零,即得频率方程

$$\sin al = 0 \quad (1-29)$$

上式的根为

$$a_n l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由式(1-23),即得梁振动的固有频率为

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-30)$$

相应地,振型函数为

$$\varphi_n(x) = A_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-31)$$

式中, A_1 不影响函数变化规律,为方便分析,可令 $A_1 = 1$ 。图 1-5 表示了等截面简支梁前三阶振型的形状。

固有振动方程(1-18)的一般解为各振型的线性叠加。把式(1-31)中的 A_1 归入 C_n ,则得

$$y(x, t) = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

$$(1-32)$$

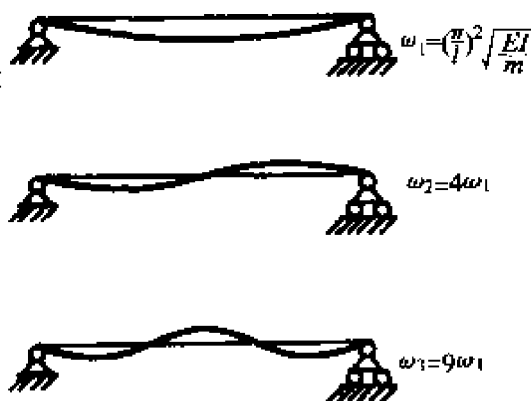


图 1-5 简支梁的振型

其中,第一振型 $C_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ 和与其相应的第一阶固有频率(称为梁振型的基频) $\omega_1 = (\frac{\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$, 具有重要的工程意义。

例 1.2.2 等截面悬臂梁的固有振动分析。

已知梁振动的振型函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x$$

且

$$\varphi'(x) = \alpha(A_1 \cos \alpha x - A_2 \sin \alpha x + A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)$$

$$\varphi''(x) = \alpha^2(-A_1 \sin \alpha x - A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x)$$

$$\varphi'''(x) = \alpha^3(-A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x + A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \text{即 } A_2 + A_4 = 0 \\ \varphi'(0) &= 0, \text{即 } A_1 + A_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(l) &= 0, \text{即 } A_1(-\sin \alpha l - \sinh \alpha l) + A_2(-\cos \alpha l - \cosh \alpha l) = 0 \\ \varphi'''(l) &= 0, \text{即 } A_1(-\cos \alpha l - \cosh \alpha l) + A_2(\sin \alpha l - \sinh \alpha l) = 0 \end{aligned} \right\}$$

或

$$\begin{bmatrix} -\sin \alpha l - \sinh \alpha l & -\cos \alpha l - \cosh \alpha l \\ -\cos \alpha l - \cosh \alpha l & \sin \alpha l - \sinh \alpha l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-33)$$

欲得非零解,上式的系数行列式必须为零,即

$$\begin{aligned} \Delta &= -\sin^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l - \cos^2 \alpha l - \cosh^2 \alpha l - 2\cos \alpha l \cosh \alpha l \\ &= -2 - 2\cos \alpha l \cosh \alpha l = 0 \end{aligned}$$

或

$$1 + \cos \alpha l \cosh \alpha l = 0 \quad (1-34)$$

上式即为悬臂梁的固有频率方程,其前面三个根对应着前三阶固有振动频率,分别是

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 l &= 1.875 & \omega_1 &= 0.356 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \alpha_2 l &= 4.694 & \omega_2 &= 2.232 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \alpha_3 l &= 7.855 & \omega_3 &= 6.252 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

由式(1-33)可得

$$A_2 = - \frac{\sin \alpha l + \sinh \alpha l}{\cos \alpha l + \cosh \alpha l} A_1 = \frac{\cos \alpha l + \cosh \alpha l}{\sin \alpha l - \sinh \alpha l} A_1$$

由边界条件得到的 $A_2 = -A_4$, $A_1 = -A_3$, 以及上式的结果代入振型函数 $\varphi(x)$ 的表达式, 可得

$$\varphi(x) = A_1 \left[\sin \alpha x - \sinh \alpha x + \frac{\sin \alpha l + \sinh \alpha l}{\cos \alpha l + \cosh \alpha l} (\cosh \alpha x - \cos \alpha x) \right] \quad (1-36)$$

将式(1-35)中的 $\alpha_1 l$ 、 $\alpha_2 l$ 和 $\alpha_3 l$ 分别代入上式即可得到前三阶振型, 其形状如图 1-6 所示。

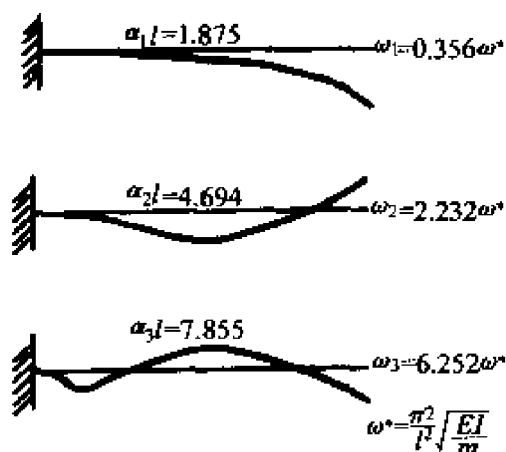


图 1-6 悬臂梁的振型

例 1.2.3 一端固定另一端铰支梁的固有振动分析。

已知梁振动的振型函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x$$

且

$$\varphi'(x) = \alpha(A_1 \cos \alpha x - A_2 \sin \alpha x + A_3 \cosh \alpha x + A_4 \sinh \alpha x)$$

$$\varphi''(x) = \alpha^2(-A_1 \sin \alpha x - A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \text{ 即 } A_2 + A_4 = 0 \\ \varphi'(0) &= 0, \text{ 即 } A_1 + A_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(l) &= 0, \text{ 即 } A_1 \sin \alpha l + A_2 \cos \alpha l + A_3 \sinh \alpha l + A_4 \cosh \alpha l = 0 \\ \varphi'(l) &= 0, \text{ 即 } \alpha^2(-A_1 \sin \alpha l - A_2 \cos \alpha l + A_3 \sinh \alpha l + A_4 \cosh \alpha l) = 0 \end{aligned} \right\}$$

因此,有

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha l - \sinh \alpha l & \cos \alpha l - \cosh \alpha l \\ \sin \alpha l + \sinh \alpha l & \cos \alpha l + \cosh \alpha l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-37)$$

欲求上式的非零解,其系数行列式必为零,即

$$\begin{aligned} \Delta &= \sin \alpha l \cos \alpha l + \sin \alpha l \cosh \alpha l - \cos \alpha l \sinh \alpha l - \sinh \alpha l \cosh \alpha l \\ &\quad - \sin \alpha l \cos \alpha l + \sin \alpha l \cosh \alpha l - \cos \alpha l \sinh \alpha l + \sinh \alpha l \cosh \alpha l \\ &= 2(\sin \alpha l \cosh \alpha l - \cos \alpha l \sinh \alpha l) = 0 \end{aligned}$$

或

$$\operatorname{tg} \alpha l = \tanh \alpha l \quad (1-38)$$

上式即为一端固定另一端铰支梁的固有频率方程。其前面三个根和相应的前三阶固有频率分别为

$$\alpha_1 l = 3.927 \quad \omega_1 = 1.562 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\alpha_2 l = 7.069 \quad \omega_2 = 5.063 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\alpha_3 l = 10.210 \quad \omega_3 = 10.562 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

由式(1-37),有

$$A_1 = \frac{\cos \alpha l - \cosh \alpha l}{\sinh \alpha l - \sin \alpha l} A_2$$

由边界条件得到的 $A_1 = -A_3$, $A_2 = -A_4$, 以及上式的结果代入振型函数 $\varphi(x)$ 的表达式,得

$$\varphi(x) = A_1 \left[\sin \alpha x - \sinh \alpha x + \frac{\sinh \alpha l - \sin \alpha l}{\cosh \alpha l - \cos \alpha l} (\cos \alpha x - \cosh \alpha x) \right] \quad (1-39)$$

图 1-7 表示了前三阶振型的形状。

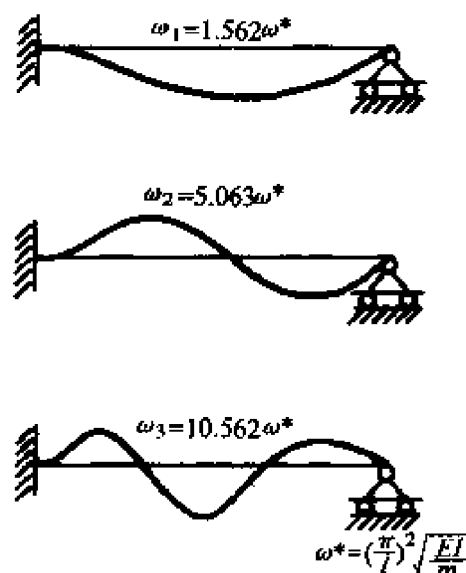


图 1-7 固端—铰支梁的振型

1.2.2 轴向受力梁的弯曲固有振动

设梁的单位长度上的质量 m 为常量, EI 也为常量。令式(1-9)中右边的 $p(x, t) = 0$, 即得固有振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + m \ddot{\gamma} = 0 \quad (1-40)$$

令 $y(x, t) = \varphi(x)q(t)$ 并代入上式, 得

$$EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} q(t) + N \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} q(t) + m \varphi(x) \ddot{q}(t) = 0$$

或

$$EI \frac{\varphi^{(4)}}{\varphi} + N \frac{\varphi''}{\varphi} + m \frac{\ddot{q}}{q} = 0$$

即

$$EI \frac{\varphi^{(4)}}{\varphi} + N \frac{\varphi''}{\varphi} = -m \frac{\ddot{q}}{q} = C$$

由此得到两个独立方程

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \\ EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - m\omega^2 \varphi(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

式中, $\omega^2 = C/m$ 。式(1-41)的第一式的解为

$$\begin{aligned} q(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \\ &= A \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (1-42)$$

式中, C_1 和 C_2 (或 A 和 θ) 均由初始条件确定。

如令

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}, g^2 = \frac{N}{EI} \quad (1-43)$$

则式(1-41)的第二式可写成

$$\frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} + g^2 \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \alpha^4 \varphi(x) = 0 \quad (1-44)$$

再令 $\varphi(x) = Be^{rx}$ 并代入上式, 即得

$$r^4 + g^2 r^2 - \alpha^4 = 0$$

上式的四个根为

$$r_{1,2} = \pm i\delta, r_{3,4} = \pm \varepsilon$$

式中, δ 和 ε 分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \frac{g^4}{4}} + \frac{g^2}{2}} \\ \varepsilon &= \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \frac{g^4}{4}} - \frac{g^2}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

将上面求得的四个根代入 $\varphi(x) = Be^{rx}$, 并用三角函数和双曲函数等式替换指数, 最后可得

$$\varphi(x) = D_1 \sin \delta x + D_2 \cos \delta x + D_3 \sinh \varepsilon x + D_4 \cosh \varepsilon x \quad (1-46)$$

上式中的四个常数 D_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 由边界条件确定。

例 1.2.4 受有常数轴向力作用梁的固有振动分析。

如图 1-8 所示, 已知梁振动的振型函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = D_1 \sin \delta x + D_2 \cos \delta x + D_3 \sinh \varepsilon x + D_4 \cosh \varepsilon x$$

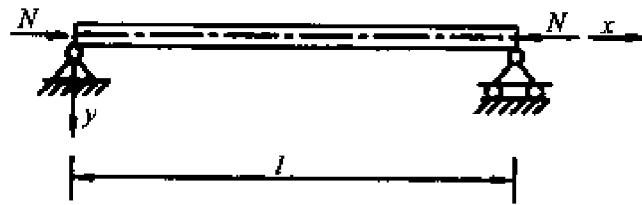


图 1-8

且

$$\varphi'(x) = \delta(D_1 \cos \delta x - D_2 \sin \delta x) + \epsilon(D_3 \cosh \epsilon x + D_4 \sinh \epsilon x)$$

$$\varphi''(x) = \delta^2(-D_1 \sin \delta x - D_2 \cos \delta x) + \epsilon^2(D_3 \sinh \epsilon x + D_4 \cosh \epsilon x)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \text{即 } D_2 + D_4 = 0 \\ \varphi''(0) &= 0, \text{即 } -\delta^2 D_2 + \epsilon^2 D_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

由此可得 $D_2 = D_4 = 0$ 。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(l) &= 0, \text{即 } D_1 \sin \delta l + D_3 \sinh \epsilon l = 0 \\ \varphi''(l) &= 0, \text{即 } -\delta^2 D_1 \sin \delta l + \epsilon^2 D_3 \sinh \epsilon l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

频率方程为

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \delta l & \sinh \epsilon l \\ -\delta^2 \sin \delta l & \epsilon^2 \sinh \epsilon l \end{vmatrix} = \sin \delta l \sinh \epsilon l (\epsilon^2 + \delta^2) = 0$$

即

$$\sin \delta l = 0 \quad (1-48)$$

上式的解为

$$\delta l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由式(1-45)可得

$$\alpha^4 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - g^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

即

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 - \frac{N}{n^2 \frac{EI\pi^2}{l^2}}} = \omega_n^* \sqrt{1 - \frac{N}{n^2 N_{cr}}} \quad (1-49)$$

式中, $\omega^* = (\frac{n\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 为无轴向力作用时简支梁的第 n 阶固有频率; $N_{cr} = \frac{EI\pi^2}{l^2}$ 为两端铰支压杆的欧拉临界荷载。从式(1-49)可以看出, 轴向压力可使频率降低, 当 $N \rightarrow N_{cr}$ 时, 基频 $\omega_1 \rightarrow 0$, 此时梁处于平衡分支状态。

当 N 为拉力时, 则有

$$\omega_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 + \frac{N}{\frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}}} \quad (1-50)$$

由此可以看出, 轴向拉力可使频率增加。如果梁的刚度 EI 很小而拉力 N 很大, 则式(1-50)中的第二个根号里的 1 可以忽略不计, 此时有

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{m}}$$

即为张紧弦的自由振动频率, 第四章中将详细讨论。

由于 $\sin \delta l = 0$, 代入式(1-47)可得 $D_3 = 0$, 因此振型 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = D_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1-51)$$

由此式可知, 考虑轴向力作用的简支梁的固有振型与简支梁的固有振型完全相同。

1.2.3 铁木辛柯(Timoshenko)梁的弯曲固有振动

令式(1-17)中的 $p(x, t) \approx 0$, 即得等截面的铁木辛柯 Timoshenko 梁的固有振动方程

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\ddot{y} - mr^2 \frac{\partial^2 \ddot{y}}{\partial x^2} - \frac{EI m}{kGA} \frac{\partial^2 \ddot{y}}{\partial x^2} + \frac{m^2 r^2}{kGA} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (1-52)$$

假定 $y(x, t) = Y(x) \sin \omega t$, 并代入式(1-52), 则有

$$EI Y^{(4)}(x) - m\omega^2 Y(x) + mr^2 \omega^2 Y''(x) + \frac{m\omega^2}{kGA} [mr^2 \omega^2 Y(x) + EI Y''(x)] = 0$$

如前,令 $\alpha^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, 则上式可以写成

$$Y^{(4)}(x) - \alpha^4 Y(x) + \alpha^4 r^2 Y''(x) + \frac{m\omega^2}{kGA} [\alpha^4 r^2 Y(x) + Y''(x)] = 0 \quad (1-53)$$

对于具有任意边界条件的梁,求解上式是困难的。但是对于简支梁,则容易求解,而且可以估计剪切变形和转动惯量影响的大小。

设 $Y(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 并代入式(1-53),整理后可得

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \alpha^4 - \alpha^4 r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) + \alpha^4 r^2 \cdot \alpha^4 r^2 \frac{E}{kG} = 0 \quad (1-54)$$

从此式可以看出,它将给出两个 ω^2 根,但这里只讨论较小的那个:

1. 式(1-54)中前两项代表以前导得的 Euler 梁的初等结果,即

$$\alpha^4 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \text{ 和 } \omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

2. 第三项表示了转动惯量和剪切变形的主要影响。假设 $G = \frac{3}{8}E$, 对矩形截面 $k = \frac{5}{6}$, 于是 $\frac{E}{kG} = 3.2$, 即说明剪切变形的重要性约为转动惯量的 3.2 倍。暂且略去式(1-54)中最后一项则有

$$\alpha^4 \left[1 + r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \right] = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$$

或

$$\alpha^4 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{1}{1 + r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right)}$$

上式中右边后一因子表示修正项。从中可以看出,当序号 n 增大时或梁的长细比 l/r 减小时,修正项也随之减小。当 nr/l 项很小时,则上式可近似地写成

$$\alpha^4 \approx \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \left[1 - \left(\frac{nr\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \right]$$

$$\omega_n \approx \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi r}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right)\right] \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

3. 最后一项的影响。注意到当 $n\pi/l$ 很小时, $\alpha^4 \approx (\frac{n\pi}{l})^4$, 所以将最后一项改写为

$$\alpha^4 r^2 \cdot \alpha^4 r^2 \frac{E}{kG} \approx \alpha^4 r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi r}{l}\right)^2 \frac{E}{kG}\right]$$

显然, 它和前一项相比是很小的, 即

$$\alpha^4 r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[\left(\frac{n\pi r}{l}\right)^2 \frac{E}{kG}\right] \ll \alpha^4 r^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right)$$

因为 $\frac{n\pi r}{l} \ll 1$ 。

对于 $l/nr = 40, 20, 10$ 和 5 的四种情况, 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的固有频率要比铁木辛柯(Timoshenko)梁的固有频率分别高 1.2% 、 4.7% 、 17.2% 和 54.4% 。

J. B. carr* 曾对 6 组边界条件给出了铁木辛柯(Timoshenko)梁的频率方程和数值结果。结果表明, 虽然艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁和铁木辛柯(Timoshenko)梁的频率差异取决于边界条件, 但是基本上还是取决于 l/nr 值。因此, 深梁的固有振动分析必须考虑剪切变形和转动惯量的影响。

1.2.4 振型的正交性

在结构动力学中, 多自由度体系的振型正交性是用矩阵形式描述的。而对于连续体系的梁桥的振型函数正交性, 则只能用积分形式给出。

1. 艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁

由一般形式的梁的振动方程(1-6), 令 $p(x, t) = 0$, 得自由振动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = -m(x) \ddot{y} \quad (1-55)$$

设 $\varphi_k(x)$ 为第 k 阶振型函数, 且令

* J. B. Carr, Aeronautical Quarterly, 21, 79, (1970)

$$y(x, t) = \varphi_k(x) \sin(\omega_k t + \theta_k)$$

将上式代入式(1-55), 有

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \varphi_k(x)}{dx^2} \right] = m(x) \omega_k^2 \varphi_k(x)$$

用另一阶振型函数 $\varphi_n(x)$ 乘上式, 并对 x 自 0 至 l 积分, 则有

$$\int_0^l \varphi_n \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) dx = \omega_k^2 \int_0^l m(x) \varphi_k \varphi_n dx \quad (1-56)$$

将上式左端作两次分部积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi_n \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) dx &= \left[\varphi_n \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) \right]_0^l \\ &- \int_0^l \frac{d\varphi_n}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) dx = \left[\varphi_n \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) \right. \\ &\left. - \frac{d\varphi_n}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) \right]_0^l + \int_0^l EI \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} dx \end{aligned}$$

上式中, 对于简单梁端边界条件, 也就是对于 $x=0$ 和 $x=l$ 端为自由、简支和固定的任意一种组合方式, 都使左端第一项为零。故式(1-56)可写成

$$\omega_k^2 \int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^l EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} dx \quad (1-57)$$

用上述同样的方法, 也可得到

$$\omega_n^2 \int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^l EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} dx \quad (1-58)$$

将式(1-57)和式(1-58)相减, 得

$$(\omega_k^2 - \omega_n^2) \int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = 0$$

只要 $\omega_k^2 \neq \omega_n^2$, 即得

$$\int_0^l m(x) \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx = 0, (k \neq n) \quad (1-59)$$

将上式代入式(1-57)或(1-58), 得

$$\int_0^l EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} dx = 0, (k \neq n) \quad (1-60)$$

再由式(1-56)可得

$$\int_0^l \varphi_n \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) dx = 0, (k \neq n) \quad (1-61)$$

上述积分形式的振型正交性质,对于自由、简支和固定端的任意一种组合方式,无论是对于等截面梁或者是变截面梁,式(1-59)、(1-60)和(1-61)都是正确的。

对于一般边界条件的情况,也可用同样的方法来求振型的正交条件。但要用式(1-27)和(1-28)的边界条件方程来代替式(1-56)中的分部积分边界条件

$$\left[\varphi_n \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) - \frac{d\varphi_n}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} \right) \right]_0^l$$

2. 铁木辛柯(Timoshenko)梁

为了讨论铁木辛柯(Timoshenko)梁的振型正交性问题,我们还从(1-15)出发来考察自由振动问题。在等截面均质梁的情况下,自由振动方程可写成

$$\left. \begin{aligned} kGA \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) + m\ddot{y} &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= kGA \left(\varphi - \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \rho I \ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1-62)$$

式中,已引入梁为等截面匀质的假定。这是具有两个独立函数 y 和 φ 的微分方程组。因此,假设 $y(x, t) = Y(x) \sin \omega t$, $\varphi(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$ 分别代入上式整理后,可写成

$$\left. \begin{aligned} kGA [\Phi'(x) - Y''(x)] &= m\omega^2 Y(x) \\ -EI\Phi''(x) + kGA [\Phi(x) - Y'(x)] &= \rho I \omega^2 \Phi(x) \end{aligned} \right\} \quad (1-63)$$

对于离散频率 ω_n 的一个无限集,由上式及边界条件,即可定出相应的由函数 $Y_n(x)$ 和 $\Phi_n(x)$ 所定出的第 n 阶振型。除了一个乘数因子以外,这个第 n 阶振型决定于由下列方程组所确定的两个函数 $Y_n(x)$ 及 $\Phi_n(x)$:

$$\left. \begin{aligned} kGA [\Phi'_n(x) - Y''_n(x)] &= m\omega_n^2 Y_n(x) \\ -EI\Phi''_n(x) + kGA [\Phi_n(x) - Y'_n(x)] &= \rho I \omega_n^2 \Phi_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (1-64)$$

由式(1-11)和式(1-13),有下列关系式

$$\left. \begin{aligned} M_n &= -EI \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \\ Q_n &= -kGA \left(\Phi_n - \frac{\partial Y_n}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-65)$$

所以,从式(1-64)中的两式可得

$$\left. \begin{aligned} -Q'_n(x) &= m\omega_n^2 Y_n(x) \\ M'_n(x) - Q_n(x) &= \rho I \omega_n^2 \Phi_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (1-66)$$

用 $Y_k(x)$ 及 $\Phi_k(x)$ 分别乘上式中第一式和第二式的两侧,对 x 从 0 到 l 进行积分,有

$$\left. \begin{aligned} m\omega_n^2 \int_0^l Y_k(x) Y_n(x) dx &= \int_0^l -Q'_n(x) Y_k(x) dx \\ &= -[Q_n(x) Y_k(x)]_0^l + \int_0^l Q_n(x) Y'_k(x) dx \\ \rho I \omega_n^2 \int_0^l \Phi_k(x) \Phi_n(x) dx &= \int_0^l [M'_n(x) - Q_n(x)] \Phi_k(x) dx \\ &= [M_n(x) \Phi_k(x)]_0^l - \int_0^l [M_n(x) \Phi'_k(x) + Q_n(x) \Phi_k(x)] dx \end{aligned} \right\} \quad (1-67)$$

将上式中的脚标 k 及 n 互换,可得另一组与之相似的方程:

$$\left. \begin{aligned} m\omega_k^2 \int_0^l Y_k(x) Y_n(x) dx &= -[Q_k(x) Y_n(x)]_0^l + \int_0^l Q_k(x) Y'_n(x) dx \\ \rho I \omega_k^2 \int_0^l \Phi_k(x) \Phi_n(x) dx &= [M_k(x) \Phi_n(x)]_0^l - \int_0^l [M_k(x) \Phi'_n(x) + Q_k(x) \Phi_n(x)] dx \end{aligned} \right\} \quad (1-68)$$

将式(1-67)减式(1-68)可得

$$\begin{aligned} m(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^l Y_k(x) Y_n(x) dx \\ = \int_0^l [Q_n(x) Y'_k(x) - Q_k(x) Y'_n(x)] dx \end{aligned}$$

$$+ [Q_k(x)Y_n(x) - Q_n(x)Y_k(x)]_0^l$$

和

$$\begin{aligned} & \rho I(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^l \Phi_k(x) \Phi_n(x) dx \\ &= [M_n(x) \Phi_k(x) - M_k(x) \Phi_n(x)]_0^l \\ &+ \int_0^l [M_n(x) \Phi'_n(x) + Q_k(x) \Phi_n(x) \\ &- M_n(x) \Phi'_k(x) - Q_n(x) \Phi_k(x)] dx \end{aligned}$$

再将上述两式相加,同时注意到 $m = \rho A$, 得

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_n^2 - \omega_k^2) \int_0^l [AY_k(x)Y_n(x) + I\Phi_k(x)\Phi_n(x)] dx \\ &= \int_0^l \{Q_n(x)[Y'_k(x) - \Phi_k(x)] - Q_k(x)[Y'_n(x) - \Phi_n(x)]\} dx \\ &+ \int_0^l [M_k(x)\Phi'_n(x) - M_n(x)\Phi'_k(x)] dx \\ &+ [Q_k(x)Y_n(x) - Q_n(x)Y_k(x)]_0^l + [M_n(x)\Phi_k(x) \\ &- M_k(x)\Phi_n(x)]_0^l \end{aligned} \quad (1-69)$$

由式(1-65)可以看出,式(1-69)中右端两个积分符号下的被积函数均为零。此外,对于简支边界条件,式(1-69)中的右端最后两项均为零。于是有

$$\int_0^l [Y_k(x)Y_n(x) + I^2\Phi_k(x)\Phi_n(x)] dx = 0 \quad (k \neq n) \quad (1-70)$$

上式即为铁木辛柯(Timoshenko)梁的主振型正交性公式。

除了简支边界条件外,对于下列齐次边界条件

$$x = 0, \begin{cases} B_1 = y, Q = 0 \\ B_2 = \varphi, M = 0 \end{cases} \quad \text{或 } B_1 = B_2 = 0$$

$$x = l, \begin{cases} B_3 = y, Q = 0 \\ B_4 = \varphi, M = 0 \end{cases} \quad \text{或 } B_3 = B_4 = 0$$

式(1-70)仍然成立。

从以上的讨论中可以看出,铁木辛柯(Timoshenko)梁的主振型是由两个函数 $Y_n(x)$ 和 $\Phi_n(x)$ ($n=1,2,3,\dots$) 所决定的,而且也具有正交性。1.2.3 小节曾看到两个不同的 ω_n 值对应于同一个 $Y_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, 其实这并不意味着二个不同固有频率对应于同一个振型,因此不要被这个假象所迷惑。

1.2.5 连续梁的弯曲固有振动

用任何精确方法进行连续梁的振动分析都是非常冗繁的过程,这主要是由于振型函数在数学分析上比较复杂而不便于计算。困难是多重性的,因为通常存在有几种不同频率的固有振动振型,它们没有本质区别,并且所有这些振型都可能对响应产生重大的影响。

图 1-9 表示连续梁的一般情形,假设连续梁每跨具有均匀分布的质量和刚度。按艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁理论,式(1-25)可应用于任意支承条件的梁跨,第 S 跨的第 n 阶振型函数为

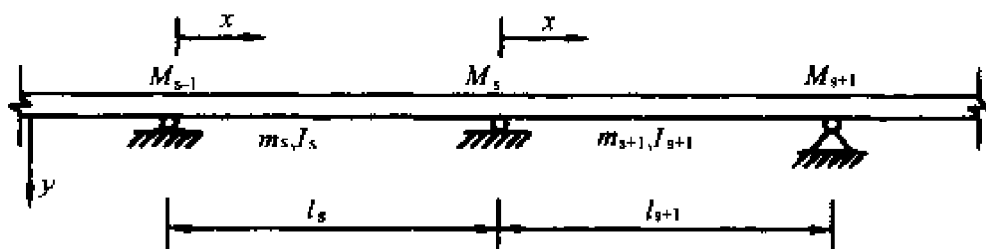


图 1-9 连续梁的符号约定

$$\varphi_{ns}(x) = A_{ns} \sin \alpha_{ns} x + B_{ns} \cos \alpha_{ns} x + C_{ns} \sinh \alpha_{ns} x + D_{ns} \cosh \alpha_{ns} x$$

且

$$\varphi'_{ns}(x) = \alpha_{ns} (A_{ns} \cos \alpha_{ns} x - B_{ns} \sin \alpha_{ns} x + C_{ns} \cosh \alpha_{ns} x + D_{ns} \sinh \alpha_{ns} x)$$

$$\varphi''_{ns}(x) = \alpha_{ns}^2 (-A_{ns} \sin \alpha_{ns} x - B_{ns} \cos \alpha_{ns} x + C_{ns} \sinh \alpha_{ns} x + D_{ns} \cosh \alpha_{ns} x)$$

式中, φ'_{ns} 和 φ''_{ns} 是 $\varphi_{ns}(x)$ 对 x 的一阶和二阶导数, 以及

$$\alpha_{ns} = \sqrt[4]{\frac{m_s \omega_n^2}{EI_s}}$$

两相邻跨梁应满足下述边界条件

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ns}(0) &= 0 \\ \varphi_{ns}(l_s) &= 0 \\ \varphi'_{ns}(l_s) &= \varphi'_{n(s+1)}(0) \\ EI_s \varphi''_{ns}(l_s) &= EI_{s+1} \varphi''_{n(s+1)}(0) = -M_{ns} \\ \varphi_{n(s+1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-71)$$

即在振型中,支点的挠度为零,而且相邻跨在共同支点处的斜率和弯矩必须相等。将振型函数及其导数代入式(1-71),可得

$$B_{ns} + D_{ns} = 0 \quad (1-72a)$$

$$A_{ns} \sin \alpha_{ns} l_s + B_{ns} \cos \alpha_{ns} l_s + C_{ns} \sinh \alpha_{ns} l_s + D_{ns} \cosh \alpha_{ns} l_s = 0 \quad (1-72b)$$

$$\begin{aligned} & A_{ns} \cos \alpha_{ns} l_s - B_{ns} \sin \alpha_{ns} l_s + C_{ns} \cosh \alpha_{ns} l_s + D_{ns} \sinh \alpha_{ns} l_s \\ &= \frac{\alpha_{n(s+1)}}{\alpha_{ns}} [A_{n(s+1)} + C_{n(s+1)}] \end{aligned} \quad (1-72c)$$

$$\begin{aligned} & -A_{ns} \sin \alpha_{ns} l_s - B_{ns} \cos \alpha_{ns} l_s + C_{ns} \sinh \alpha_{ns} l_s + D_{ns} \cosh \alpha_{ns} l_s \\ &= \frac{\alpha_{n(s+1)}^2}{\alpha_{ns}^2} \frac{I_{s+1}}{I_s} [-B_{n(s+1)} + D_{n(s+1)}] \end{aligned} \quad (1-72d)$$

$$B_{n(s+1)} + D_{n(s+1)} = 0 \quad (1-72e)$$

将式(1-72b)和(1-72d)相加和相减,并将式(1-72e)代入则有

$$C_{ns} \sinh \alpha_{ns} l_s - B_{ns} \cosh \alpha_{ns} l_s = -B_{n(s+1)} \frac{\alpha_{n(s+1)}^2}{\alpha_{ns}^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}$$

$$A_{ns} \sin \alpha_{ns} l_s + B_{ns} \cos \alpha_{ns} l_s = B_{n(s+1)} \frac{\alpha_{n(s+1)}^2}{\alpha_{ns}^2} \frac{I_{s+1}}{I_s}$$

从而可得

$$\left. \begin{aligned} A_{ns} &= \frac{-B_{ns} \cos \alpha_{ns} l_s + B_{n(s+1)} \frac{\alpha_{n(s+1)}^2 I_{s+1}}{\alpha_{ns}^2 I_s}}{\sin \alpha_{ns} l_s} \\ C_{ns} &= \frac{B_{ns} \cosh \alpha_{ns} l_s - B_{n(s+1)} \frac{\alpha_{n(s+1)}^2 I_{s+1}}{\alpha_{ns}^2 I_s}}{\sinh \alpha_{ns} l_s} \end{aligned} \right\} \quad (1-73)$$

将式(1-73)两式相加,得

$$A_{ns} + C_{ns} = B_{ns} G_{ns} - B_{n(s+1)} \frac{\alpha_{n(s+1)}^2 I_{s+1}}{\alpha_{ns}^2 I_s} H_{ns} \quad (1-74)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} G_{ns} &= \operatorname{ctanh} \alpha_{ns} l_s - \operatorname{ctg} \alpha_{ns} l_s \\ H_{ns} &= \operatorname{csch} \alpha_{ns} l_s - \operatorname{csc} \alpha_{ns} l_s \end{aligned} \right\} \quad (1-75)$$

将式(1-74)中的下脚标 s 均增加 1, 并将所得的 $A_{n(s+1)} + C_{n(s+1)}$ 代入式(1-72c)的右边, 式(1-73)及 $D_{ns} = -B_{ns}$ 代入式(1-72c)的左边, 整理后得

$$\begin{aligned} B_{ns} H_{ns} - B_{n(s+1)} \left[\frac{\alpha_{n(s+1)}^2 I_{s+1}}{\alpha_{ns}^2 I_s} G_{ns} + \frac{\alpha_{n(s+1)}}{\alpha_{ns}} G_{n(s+1)} \right] \\ + B_{n(s+2)} \frac{\alpha_{n(s+2)}^2 I_{s+2}}{\alpha_{ns} \alpha_{n(s+1)} I_{s+1}} H_{n(s+1)} = 0 \end{aligned} \quad (1-76)$$

由式(1-71)第 4 式可得

$$M_{ns} = -EI_{s+1} [-B_{n(s+1)} + D_{n(s+1)}] \alpha_{n(s+1)}^2$$

将 $D_{n(s+1)} = -B_{n(s+1)}$ 代入上式可得

$$B_{n(s+1)} = \frac{M_{ns}}{2EI_{s+1} \alpha_{n(s+1)}^2} \quad (1-77)$$

最后, 将式(1-77)以及相应的下脚标 s 增 1 和减 1 的式子代入式(1-76), 约去公因子后, 得

$$\begin{aligned} M_{n(s-1)} \frac{H_{ns} l_s}{\alpha_{ns} l_s I_s} - M_{ns} \left[\frac{G_{ns} l_s}{\alpha_{ns} l_s I_s} + \frac{G_{n(s+1)} l_{s+1}}{\alpha_{n(s+1)} l_{s+1} I_{s+1}} \right] \\ + M_{n(s+1)} \frac{H_{n(s+1)} l_{s+1}}{\alpha_{n(s+1)} l_{s+1} I_{s+1}} = 0 \end{aligned} \quad (1-78)$$

方程式(1-78)是用于计算连续梁固有振动频率的三弯矩方程,它相当于静力分析中所用的三弯矩方程,可应用于每一对相邻跨梁。如果边跨端部是铰结的,则该点的弯矩取为零;如果端部是固结的, $M_{n(s-1)}$ 就是固端弯矩,同时在边支点以外取虚构梁跨的 EI 为无限大。

用方程(1-78)对于每个内支点弯矩均可写出一个方程,全部支点形成一组联立方程式。这些 $\{M\}$ 就是按该振型固有振动时产生的弯矩,当然不能唯一确定其值。然而,为了使任意振动成为可能, $\{M\}$ 的系数行列式必为零。展开之即得连续梁的固有振动频率方程,其根是 $\alpha_n l_s$ 值,与 ω_n 直接相关。求得频率后,就可将每个根依次代入式(1-72)的边界方程中确定振型。此时需要的方程数目比所计算的系数数目少1。

为了说明频率方程(1-78)的求解过程,这里仅以四跨以下连续梁为例,讨论固有频率的求法。

例 1.2.5 两跨连续梁的弯曲固有振动分析。

图 1-10a 表示跨连续梁。 $M_{n0} = M_{n2} = 0$,只有一个内支承点弯矩 M_{n1} ,故方程(1-78)只需写一次,于是

$$- M_{n1} \left(\frac{G_{n1} l_1}{\alpha_{n1} l_1 I_1} + \frac{G_{n2} l_2}{\alpha_{n2} l_2 I_2} \right) = 0$$

频率方程为

$$\frac{G_{n1} l_1}{\alpha_{n1} l_1 I_1} + \frac{G_{n2} l_2}{\alpha_{n2} l_2 I_2} = 0 \quad (1-79)$$

式中

$$G_{n1} = \operatorname{ctanh} \alpha_{n1} l_1 - \operatorname{ctg} \alpha_{n1} l_1$$

$$G_{n2} = \operatorname{cth} \alpha_{n2} l_2 - \operatorname{ctg} \alpha_{n2} l_2$$

$$\alpha_{n1} = \sqrt[4]{\frac{m_1 \omega_n^2}{EI_1}}$$

$$\alpha_{n2} = \sqrt[4]{\frac{m_2 \omega_n^2}{EI_2}}$$

当给出梁的性质后, $\alpha_{n1}l_1$ 和 $\alpha_{n2}l_2$ 有着恒定的关系。通常这种频率方程是不易求解的, 必须采用试算的方法。

当两跨刚度、跨径和质量均相等时, 有频率方程

$$G_{n1} + G_{n2} = 0 \quad (1-80)$$

上面方程有二组根。第一组相应于

$$G_{n1} = G_{n2} = \pm \infty$$

第二组相应于

$$G_{n1} = G_{n2} = 0$$

对应的根分别为

$$\alpha_{n1}l_1 = \alpha_{n2}l_2 = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

和

$$\alpha_{n1}l_1 = \alpha_{n2}l_2 = 3.927, 7.069, 10.210, \dots$$

因此, 固有频率序列由下式给出

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{1}{l^2} (\pi^2, 3.927^2, 4\pi^2, 7.069^2, 9\pi^2, 10.210^2, \dots) \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (1-81)$$

前四阶振型如图 1-10b 所示。由图可见, 第一组根(奇次振型)对应于反对称振型, 与单跨简支梁的固有振型相同。第二组根(偶次振型)对应于对称振型, 它相当于一端固定另一端简支的单跨梁(参考图 1-7)。与单跨梁振型相似显然是正确的, 因为在反对称振型中, 在中间支点有一个节点, 因而两跨互不影响。另一方面, 在对称振型中, 中间支点处不可能转动, 这种情形就类似于固端支承。

例 1.2.6 三跨连续梁的弯曲固有振动分析。

图 1-11a 表示三跨连续梁。 $M_{n0} = M_{n3} = 0$, 有两个内支承点弯矩 M_{n1} 和 M_{n2} , 方程(1-78)要写两次, 于是

$$\left. \begin{aligned} -M_{n1} \left(\frac{G_{n1}l_1}{\alpha_{n1}l_1I_1} + \frac{G_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2} \right) + M_{n2} \frac{H_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2} &= 0 \\ M_{n1} \frac{H_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2} - M_{n2} \left(\frac{G_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2} + \frac{G_{n3}l_3}{\alpha_{n3}l_3I_3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

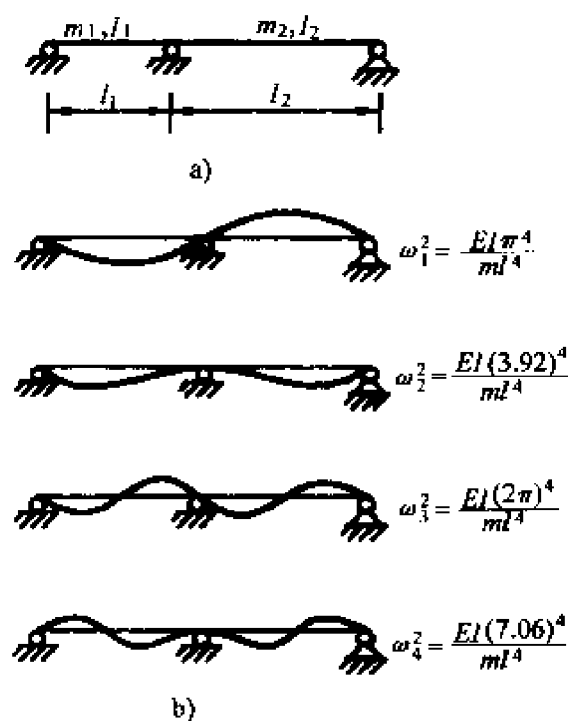


图 1-10 双跨连续梁的振型

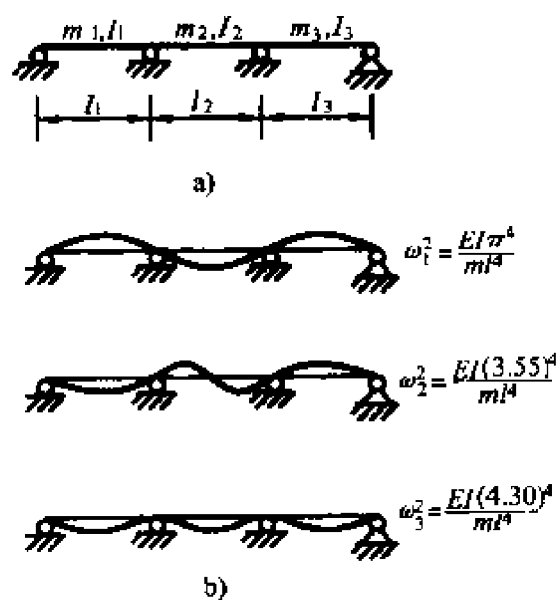


图 1-11 三跨连续的振型

展开 $\{M_n\}$ 的系数行列式, 可得频率方程

$$\left(\frac{G_{n1}l_1}{\alpha_{n1}l_1I_1} + \frac{G_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2}\right)\left(\frac{G_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2} + \frac{G_{n3}l_3}{\alpha_{n3}l_3I_3}\right) - \left(\frac{H_{n2}l_2}{\alpha_{n2}l_2I_2}\right)^2 = 0 \quad (1-82)$$

求解上述频率方程极其困难。但当三跨的刚度、跨径和质量均相等时,有

$$4G_n^2 - H_n^2 = 0 \quad (1-83)$$

或

$$2G_n = \pm H_n$$

式中, G_n 和 H_n 适应于任一跨梁。此方程的三组根分别为

$$\text{第 1 组: } G_n = H_n = \pm \infty$$

本组根的第一个根为

$$\alpha_1 l = \pi$$

全组根与单跨简支梁相同。

$$\text{第 2 组: } 2G_n = -H_n$$

本组根的第一个根是

$$\alpha_2 l = 3.55$$

它就对应梁的第二阶振型。全组根的所有振型在中间跨的中点有一个节点。

$$\text{第 3 组: } 2G_n = H_n$$

本组根的第一个根是

$$\alpha_3 l = 4.30$$

它对应梁的第三阶振型。

前三阶振型如图 1-11b 所示。

例 1.2.7 四跨连续梁的弯曲固有振动分析。

图 1-12a 所示为四跨连续梁。 $M_{n0} = M_{n4} = 0$, 共有三个内支承点弯矩 M_{n1} 、 M_{n2} 和 M_{n3} , 方程(1-78)要写三次, 当然频率方程要更复杂得多。当四跨梁的刚度、跨径和质量均相等时, 有

$$\sqrt{2}G_n = \pm H_n \quad (1-84)$$

这里存在三组根,其中第一组与单跨简支梁相同。前三阶的振型如图 1-12b 所示。

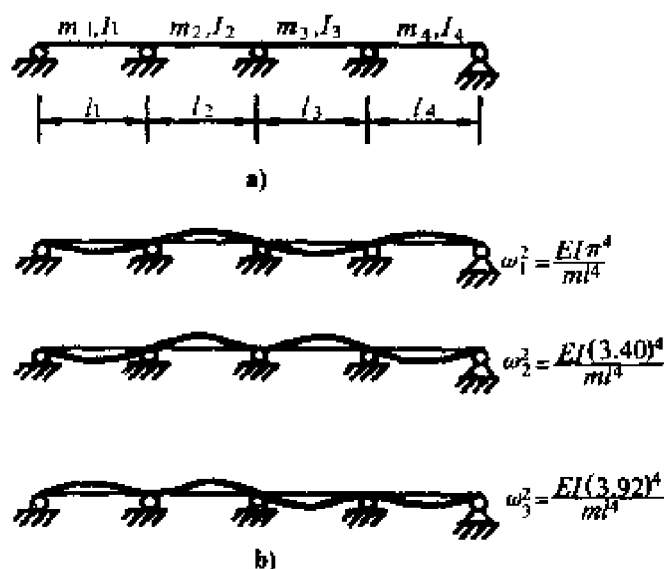


图 1-12 四跨连续梁的振型

从以上三个例子的分析中可以看出,对于边跨的外端支点为铰支的任意跨数的等跨径、等截面连续梁,基本振型均与单跨简支梁相同。单跨的高阶振型也是多跨的高阶振型,不过这些振型中还夹杂有其它振型。还有另外一组在内支点上仅有微小转动的对称振型,这些振动约略相当于单跨固支梁。此外,还有这两种类型的各种不同组合,随着跨数的增加,可能组合的数目也增多。

1.2.6 带有集中质量梁的弯曲固有振动

当梁上在 $x = \xi$ 处有一集中质量 M_0 时,则其振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + [m + M_0 \delta(x - \xi)] \ddot{y} = p(x, t)$$

现设 EI 和 m 均为常数,且 $p(x, t) = 0$,则有

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [m + M_0 \delta(x - \xi)] \ddot{y} = 0 \quad (1-85)$$

式中, $\delta(x - \xi)$ 为狄拉克(Dirac)函数, 即

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 1, & x = \xi \\ 0, & x \neq \xi \end{cases}$$

$$\text{令 } y(x, t) = \varphi(x) \sin \hat{\omega} t, \text{ 并代入式(1-86)}$$

式中, $\hat{\alpha}^4 = \frac{\hat{\omega}^2 m}{EI}$, 其中 $\hat{\omega}$ 为带有集中质量 Euler 梁的固有频率

如果 $\varphi_n(x)$ 为该梁在无集中质量时的第 n 阶振型, 则

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (1-87)$$

显然上式满足边界条件。

将式(1-87)代入式(1-86), 有

$$\sum_n b_n \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} - \hat{\alpha}^4 \left[1 + \frac{M_0}{m} \delta(x - \xi) \right] \sum_n b_n \varphi_n(x) = 0$$

将上式两边乘以 $\varphi_k(x)$, 并对 x 在 0 到 l 的区间进行积分。根据主振型的正交性, 对于均匀梁有下列关系存在

$$\int_0^l \varphi_k(x) \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \alpha_n^4 \int_0^l \varphi_n^2(x) dx = \alpha_n^4 \frac{M_{en}}{m}, & n = k \end{cases}$$

式中, $\alpha_n^4 = \frac{m \omega_n^2}{EI}$, ω_n 为无集中质量梁的固有频率;

$$M_{en} = m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx$$

为梁的等效质量。于是, 积分后得

$$b_n \alpha_n^4 M_{en} - \hat{\alpha}^4 \left[b_n M_{en} + M_0 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l \delta(x - \xi) b_k \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx \right] = 0$$

或

$$b_n \alpha_n^4 M_{en} - \hat{\alpha}^4 \left[b_n M_{en} + M_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(\xi) \varphi_n(\xi) \right] = 0$$

由式(1-87), 可得

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(\xi)$$

代入上式,有

$$b_n \alpha_n^4 M_{en} - b_n \hat{\alpha}^4 M_{en} - \hat{\alpha}^4 M_0 \varphi(\xi) \varphi_n(\xi) = 0$$

解之,得

$$b_n = \frac{M_0 \hat{\alpha}^4 \varphi(\xi) \varphi_n(\xi)}{M_{en}(\alpha_n^4 - \hat{\alpha}^4)} \quad (1-88)$$

将式(1-88)再代回式(1-87),则有

$$\varphi(x) = M_0 \hat{\alpha}^4 \varphi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi) \varphi_n(x)}{M_{en}(\alpha_n^4 - \hat{\alpha}^4)} \quad (1-89)$$

上式对于所有的 x 均适用。故当 $x = \xi$ 时,上式变为

$$1 = M_0 \hat{\alpha}_k^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(\xi)}{M_{en}(\alpha_n^4 - \hat{\alpha}_k^4)} \quad (1-90)$$

上式即为带有集中质量 M_0 (在 $x = \xi$) 的梁在作无阻尼弯曲固有振动时的频率方程。式中, $\hat{\alpha}_k$ 表示第 k 阶频率系数,相应地, $\hat{\omega}_k$ 与 $\hat{\alpha}_k$ 之间有如下关系

$$\hat{\omega}_k = \hat{\alpha}_k^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

由式(1-89)可得相应的第 k 阶振型函数 $\hat{\varphi}_k(x)$ 为

$$\hat{\varphi}_k(x) = M_0 \hat{\alpha}_k^4 \varphi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi) \varphi_n(x)}{M_{en}(\alpha_n^4 - \hat{\alpha}_k^4)} \quad (1-91)$$

从上式可以看出,带有集中质量 M_0 时的振型函数与无集中质量时完全不同。由于每个 $\hat{\varphi}_k(x)$ 都满足边界条件及方程(1-86),故式(1-86)的全解为

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \hat{\varphi}_k(x) \quad (1-92)$$

其中, C_k 为常数。当然也可将式(1-91)右边求和号前的系数归入 C_k , 而记为 A_k 而将上式写为

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \hat{\varphi}_k^*(x)$$

式中

$$\hat{\varphi}_k^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{M_{en}(\hat{\alpha}_n^4 - \hat{\alpha}_k^4)} \quad (1-93)$$

也是振型函数。

例 1.2.8 简支梁在跨中有一集中质量 M_0 的弯曲固有振动分析。

无集中质量时,简支梁的第 n 阶振型为

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

所以,有

$$M_{en} = m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx = m \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} lm$$

代入式(1-90),得

$$1 = \frac{2M_0\hat{\alpha}_k^4}{ml} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{(\frac{n\pi}{l})^4 - \hat{\alpha}_k^4} \quad (\xi = l/2)$$

或

$$1 = \frac{2M_0\hat{\alpha}_k^4}{ml} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n\pi/l)^4 - \hat{\alpha}_k^4}$$

令 $\hat{\Omega}_k = \hat{\alpha}_k l$, 则上式可写成

$$1 = \frac{2M_0\hat{\Omega}_k^4}{m} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^4 - \hat{\Omega}_k^4} = \frac{\hat{\Omega}_k}{4} \frac{M_0}{M} [\operatorname{tg}(\frac{\hat{\Omega}_k}{2}) - \tanh(\frac{\hat{\Omega}_k}{2})]$$

上式中, $M = ml$ 为梁的总质量,且

$$\hat{\omega}_k = (\frac{\hat{\Omega}_k}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

以上仅仅讨论了梁上只有一个集中质量的固有振动问题。在梁桥动载试验时,往往是用双轴汽车在桥面垫块上跳车来激励桥梁振动,从而测试桥梁结构的动力特性,相应的力学模型是梁上在两个不同地方附加集中质量,研究方法与本小节类似,这里不再赘述。

1.3 梁桥固有振动分析的近似方法

在上一节中,我们讨论了对一些规定的边界条件梁的弯曲固有振动频率和固有振型。但是,对于截面尺寸是轴向坐标 x 的函数的变截面梁,在满足式(1-6)和一定的边界条件下,除了很少几个特定情况外,这样的解是很难求的。因此,需要采用一些近似方法来确定固有频率和相应的固有振型。本节将讨论三种近似方法,即能量法、等代梁法和加权残值法。

1.3.1 能量法

1. 瑞莱(Rayleigh)法

图 1-13 表示一变截面的梁。单位长度上的质量为 $m(x) = \rho A(x)$, 在坐标 $x_1, x_2, \dots, x_j$ 处有集中质量 $M_1, M_2, \dots, M_j$, 即横隔梁的简化集中质量。

当系统作无阻尼固有振动时,其动能与位能反复交换。根据能量守恒原理,对于保守系统,可以写出

$$T + V = \text{常数}$$

式中, T 和 V 分别表示系统的动能和位能。

对于无阻尼固有振动,梁的横向位移可表示为

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \theta)$$

式中, $\varphi(x)$ 为满足梁的位移边界条件的近似振型函数。则有梁的动能

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j M_i [\dot{y}(x_i, t)]^2$$

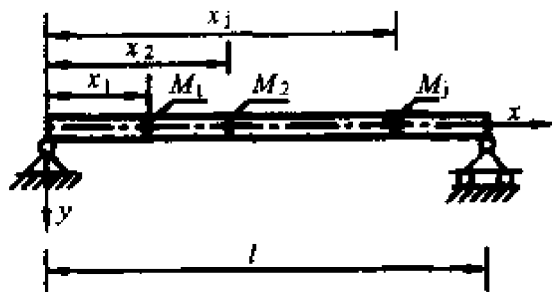


图 1-13

$$= \frac{1}{2} \cos^2(\omega t + \theta) \left[\int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum_{i=1}^j M_i \varphi^2(x_i) \right] \omega^2$$

梁的位能

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \theta) \int_0^l EI(x) \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^2 dx \end{aligned}$$

因为 $T + V = \text{常数} = T_{\max} = V_{\max}$, 所以有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \omega^2 \left[\int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum_{i=1}^j M_i \varphi^2(x_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right]^2 dx \end{aligned}$$

即梁振动的固有频率为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) \left[\varphi''(x) \right]^2 dx}{\int_0^l m(x) \varphi^2(x) dx + \sum_{i=1}^j M_i \varphi^2(x_i)} \quad (1-94)$$

若对一特定的振型, 我们已知 $\varphi(x)$ 的正确形式, 则式(1-94)给出固有频率的精确值。瑞莱指出, 对于一个合理假定的固有振型, 必须满足所有的几何边界条件(也就是梁端的位移和转角条件), 这样便可得到一个较好的固有频率的近似值。如果假定的固有振型和精确的固有振型之间相差一个小量, 那么, 由式(1-94)得到的固有频率和精确值之间的差值将是非常之小的。此外, 如果假定的振型接近于基谐调振型, 则由式(1-94)给出的基频将略高于精确值, 因为作这种假定相当于引进了附加约束。一般地, 都是用式(1-94)求梁振动的基频。

例 1.3.1 用瑞莱法计算等截面固端梁(图 1-14)的一阶固有频率。

假定梁的一阶振型函数为

$$\varphi(x) = A \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

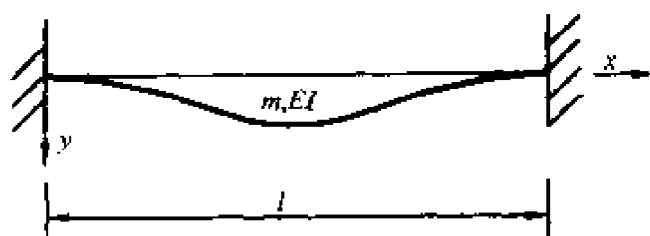


图 1-14

它是取自均匀荷载下固端梁的挠曲函数。最大动能和位能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{\varphi}^2(x) dx \omega^2 = mA^2 \omega^2 \frac{l}{630}$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [\varphi''(x)]^2 dx = EIA^2 \frac{4}{5l^3}$$

由式(1-94)可得 $\omega = \frac{22.5}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$, 与精确解结果一致。

2. 李兹(Ritz)法

李兹法在瑞莱法的基础上作了改进,可用以求出更精确的基频,同时也可用来求得高阶固有频率及振型的近似值。

把上一小节中的振型函数 $\varphi(x)$ 假设为一个级数

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad (1-95)$$

式中,每一假设函数 $\varphi_i(x)$ 必须满足几何边界条件,同时各 $\varphi_i(x)$ 还必须是线性无关的,而参数 C_i 则是任意的。这就是把瑞莱法加以扩展,并可改善精度。为了尽可能减少附加约束的影响,参数 C_i 的选择应使按式(1-94)所确定的频率为极小值。于是数学上就形成了一个极值条件

$$\frac{\partial(\omega^2)}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1-96)$$

上式实际上就是关于 $\{C\}$ 的齐次线性方程组,相应的系数行列式必为零,从而可得频率方程。下面就对上述的思路加以说明。

将式(1-95)代入式(1-94),有

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{\int_0^l EI \left[\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i''(x) \right]^2 dx}{\int_0^l m \left[\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \right]^2 dx + \sum_{s=1}^j M_s \left[\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x_s) \right]^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k \int_0^l EI \varphi_i''(x) \varphi_k''(x) dx}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k \int_0^l m \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{s=1}^j M_s \varphi_i(x_s) \varphi_k(x_s)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k k_{ik}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k m_{ik}}
\end{aligned} \tag{1-97}$$

式中

$$k_{ki} = k_{ik} = \int_0^l EI \varphi_i''(x) \varphi_k''(x) dx$$

$$m_{ki} = m_{ik} = \int_0^l m \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{s=1}^j M_s \varphi_i(x_s) \varphi_k(x_s)$$

将上式代入式(1-96),则有

$$\frac{2 \sum_{k=1}^n C_k k_{ik}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k m_{ik}} - \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k k_{ik} \right) \left(\sum_{k=1}^n C_k m_{ik} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_i C_k m_{ik} \right)^2} = 0$$

考虑到式(1-97),则上式变成

$$\sum_{k=1}^n k_{ik} C_k - \omega^2 \sum_{k=1}^n m_{ik} C_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \tag{1-98a}$$

或写成矩阵形式为

$$([k] - \omega^2 [m]) \{C\} = 0 \tag{1-98b}$$

式中, $\{C\} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_n]^T$ 为参数列向量。而 $[k]$ 和 $[m]$ 均为对称矩阵, 其中的元素由式(1-97)定义。

从式(1-98b)可以看出,它和多自由度体系 $\neq k$)

则矩阵 $[m]$ 为一对角阵。

例 1.3.2 一均匀悬臂梁,在其端部有一个集中质量 $M = 2ml$,如图 1-15 所示。试确定该梁的第一阶和第二阶固有频率。

本例的精确解是已知的, $\omega_1 = \frac{1.1582}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$, $\omega_2 = \frac{15.861}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$
现在用瑞莱法和李兹法求得的近似解与之比较。

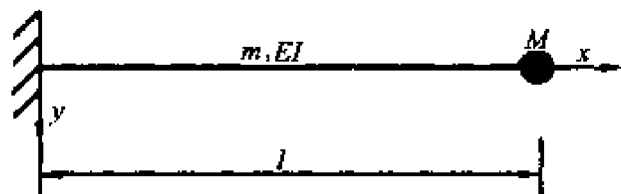


图 1-15

(1)先用瑞莱法求第一阶频率

$$\text{令 } \varphi(x) = B(3lx^2 - x^3)$$

即为等截面悬臂梁在梁端有一集中荷载作用下的静挠度曲线,故它满足几何边界条件。于是

$$\varphi''(x) = 6B(l - x), \varphi(l) = 2Bl^3$$

分别代入式(1-94),则有

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EI[6B(l-x)]^2 dx}{\int_0^l mB^2(3lx^2 - x^3)^2 dx + 2ml(2Bl^3)^2}$$

积分后可得

$$\omega_1 = \frac{1.1584}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

它仅比精确值高 0.02%,故静挠度曲线是第一振型的一个很好近

似形状。当端部集中质量 M 比起梁自重 ml 较小时,则 $\varphi(x)$ 宜用均布荷载作用下的静挠度曲线来近似表示一阶振型。

(2)再用李兹法求第一阶和第二阶固有频率

设 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$$

式中, $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 分别为端部没有集中质量时的等截面悬臂梁的第一阶和第二阶振型函数。

从 1.2.1 小节中的例 1.2.2 可得, $\alpha_1 l = 1.875$, $\alpha_2 l = 4.694$ 。同时为了方便,将 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 取为正则化的振型函数(即有 $\int_0^l \varphi_i^2(x) dx = l, i = 1, 2$), 则有

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right)^2 dx = \alpha_i^4 l$$

和

$$\varphi_1(l) = 2, \quad \varphi_2(l) = -2$$

由式(1-97)可得

$$k_{ii} = \alpha_i^4 EI l, k_{12} = k_{21} = 0, m_{ii} = 9ml, m_{12} = m_{21} = -8ml$$

将上述所有数据代入式(1-98b), 有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^4 EI l - 9ml\omega^2 & 8ml\omega^2 \\ 8ml\omega^2 & \alpha_2^4 EI l - 9ml\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0$$

将上式乘以 l^3 , 并除以 EI , 则有

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^4 l^4 - \frac{9ml^4 \omega^2}{EI} & \frac{8ml^4 \omega^2}{EI} \\ \frac{8ml^4 \omega^2}{EI} & \alpha_2^4 l^4 - \frac{9ml^4 \omega^2}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0$$

令 $\Omega = \frac{ml^4 \omega^2}{EI}$, 并将 $\alpha_1 l = 1.875$ 和 $\alpha_2 l = 4.694$ 代入上式, 得

$$\begin{bmatrix} 12.362 - 9\Omega & 8\Omega \\ 8\Omega & 485.519 - 9\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0$$

于是得频率方程为

$$\det \begin{bmatrix} 12.362 - 9\Omega & 8\Omega \\ 8\Omega & 485.519 - 9\Omega \end{bmatrix} = 0$$

上式有两个根, $\Omega_1 = 1.3463$, $\Omega_2 = 262.23$, 即

$$\omega_1 = \frac{1.1603}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \omega_2 = \frac{16.193}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

本例中, 用李兹法给出的第一和第二阶频率的近似值分别比它们的精确值要高 0.18% 和 2.1%。由

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{12.362 - 9\Omega}{8\Omega}$$

可得, 对应于第一和第二阶振型分别为 $\frac{C_2}{C_1} = -0.0227$ 和 1.119。

若固有振型 $\varphi(x)$ 假定为 $\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为端部无集中质量时的第一阶固有振型, 也就是认为端部集中质量的存在并不改变振型, 则从上述分析中令 $C_2 = 0$ 即可得到 $9\Omega = 12.362$ 及 $\omega_1 = \frac{1.1719}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$, 与精确值相比有 1.2% 的误差。因此, 用只有两项级数的李兹法, 便可使第一阶频率的精度有较大的提高, 而且还给出第二阶频率一个很好的近似。若在级数中取更多的项, 则可得更好精度的数值解。

3. 迦辽金 (Галёркин) 法

在式(1-4)中, 令 $p(x, t) = 0$, $y(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t$ 为简谐振动, 则有

$$\int_0^l \{ [EI\varphi''(x)]'' - m\omega^2 \varphi(x) \} \delta\varphi(x) dx = 0 \quad (1-99)$$

上式中积分号内的大括号部分等于零就是我们已知的固有振动方程。因此上式的物理意义就是动力学的虚功原理, 即在实际可能的振动中, 体系的弹性力和惯性力对微小虚位移 $\delta\varphi$ 所做虚功之总和等于零。

若引入近似的振型函数

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$$

式中, $\varphi_i(x)$ 为满足梁的几何边界条件和力学边界条件的近似振型函数, C_i 为待定系数, 则式(1-5)自然满足。于是, 将 $\varphi(x)$ 和 $\delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \delta C_i$ 代入式(1-99), 得

$$\int_0^l \left[\left(EI \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i'' \right)'' - m\omega^2 \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i \right] \sum_{j=1}^n \varphi_j \delta C_j dx = 0$$

整理后, 得

$$\int_0^l \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_i [(EI\varphi_i'')'' - m\omega^2 \varphi_i] \varphi_j \delta C_j dx = 0$$

由于 δC_j 的任意性, 上式可写成 n 个齐次方程式为

$$\int_0^l \sum_{i=1}^n C_i [(EI\varphi_i'')'' - m\omega^2 \varphi_i] \varphi_j dx = 0 \quad (1-100a)$$

如引入

$$k_{ij} = \int_0^l [EI\varphi_i''(x)]'' \varphi_j(x) dx = 0$$

$$m_{ij} = \int_0^l m\varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

则式(1-100a)可写成

$$\sum_{i=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) C_i = 0 \quad (1-100c)$$

迦辽金法也是将无限自由度离散化为有限自由度体系。同样, 式(1-100c)可按多自由度体系方法求解。

例 1.3.3 用迦辽金法求具有不对称质量分布的简支梁桥的固有频率(图 1-16)。

$$\text{设 } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

由式(1-100a), 有

$$\int_0^l \left\{ \sum_n C_n \sin \frac{n\pi}{l} \left[EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - m\omega^2 \right] \right\}$$

$$\sin \frac{k\pi x}{l} dx - \int_0^\lambda \left[\sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right. \\ \left. m_p \omega^2 \right] \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

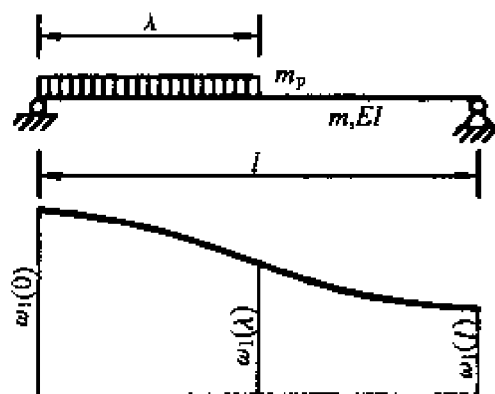


图 1-16 具有不对称质量分布的梁桥

积分后,得

$$\left(\frac{\epsilon_{k0}^2}{\omega^2} - 1 \right) C_k - \frac{2m_p}{\pi m} \sum_n S_{kn} C_n = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

式中, $\epsilon_{k0}^2 = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{m}$, $S_{kn} = \frac{\pi}{l} \int_0^\lambda \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = S_{nk}$

若近似地取级数的前三项,则得关于 C_1 、 C_2 和 C_3 的联立齐次方程组

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{\epsilon_1^2}{\omega^2} - 1 \right) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\epsilon_2^2}{\omega^2} - 1 \right) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & \frac{1}{\beta_3} \left(\frac{\epsilon_3^2}{\omega^2} - 1 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\text{式中 } \epsilon_k^2 = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{m \left[1 + \frac{m_p}{m} \left(\frac{\lambda}{l} - \frac{1}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi\lambda}{l} \right) \right]}$$

$$\beta_k = \frac{2 \frac{m_p}{m}}{\pi \left[1 + \frac{m_p}{m} \left(\frac{\lambda}{l} \right) - \frac{1}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi\lambda}{l} \right]}$$

最后可得第一阶固有频率的计算公式

$$\omega_1 = \epsilon_1 \sqrt{1 - \delta} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI(1 - \delta)}{m \left[1 + \frac{m_p}{m} \left(\frac{\lambda}{l} \right) - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\lambda}{l} \right]}}$$

式中, δ 为修正值, 一般很小, 可忽略不计。当 λ 从 $0 \rightarrow l$ 时, ω_1 的变化如图 1-16 所示。

1.3.2 等代梁法

在计算钢桁梁桥的弯曲固有频率时, 常用与钢桁梁刚度相等的等截面实腹梁来替代, 从而按前面已学过的方法计算其固有频率。

1. 简支钢桁梁的竖向弯曲固有频率

所求的等代梁的抗弯刚度 EI 由钢桁梁与等代梁在最大特性点处的挠度相等的条件来决定。设跨中挠度相等为条件, 即

$$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = \sum_i^n \bar{N}_i N_{qi} \frac{S_i}{EA_i}$$

式中, q 为桁梁自重, 假设为常数, $\bar{N}_i$ 为单位荷载作用在跨中时的桁梁第 i 杆力, N_{qi} 为第 i 杆在 q 作用下的杆力, S_i 为第 i 杆长, EA_i 为第 i 杆的抗拉(压)刚度。由上式可得

$$EI = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{\sum_i \bar{N}_i N_{qi} \frac{S_i}{EA_i}} \quad (1-101)$$

于是, 由式(1-30)或能量法可求得 ω_{eq} 。

2. 连续钢桁梁桥的竖向弯曲固有频率

如图 1-17 所示钢桁梁横断面, 忽略腹杆截面的影响, 则由上、下弦杆截面组成的组合截面形心为

$$x_0 = \frac{HA_1}{A_u + A_l}$$

于是,可得组合截面的竖向抗弯刚度为

$$\begin{aligned} EI &= E[A_u x_0^2 + A_l (H - x_0)^2 + I_{cu} + I_{cl}] \\ &= E \frac{A_u A_l}{A_u + A_l} H^2 + E(I_{cu} + I_{cl}) \end{aligned} \quad (1-102)$$

式中, A_u 、 A_l 为上下弦杆的毛截面积; I_{cu} 、 I_{cl} 为上下弦杆毛截面绕各自水平形心轴的惯性矩; H 为主桁的高度。式(1-102)即为等代梁刚度。

将上式代入式(1-23)和式(1-78),即可借助于连续钢桁梁的边界支承条件,写出等代梁的频率方程。对于两边跨端支承为铰结、等跨径、等截面连续钢桁梁桥的四跨以下固

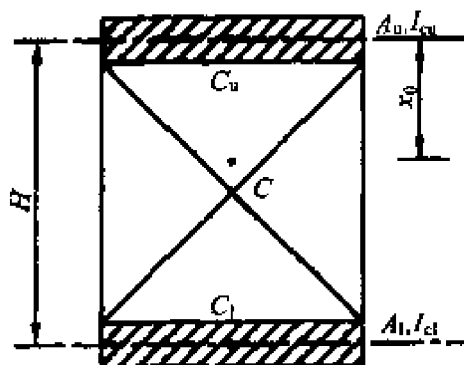


图 1-17

有频率的计算,可参考 1.2.5 小节中的例 1.2.5 ~ 例 1.2.7。

1.3.3 加权残值法

已知某一典型梁桥振动方程和边界条件可写成

$$\left. \begin{aligned} L(\varphi) - \omega^2 m\varphi &= 0, 0 \leq x \leq l \\ B(\varphi) - h &= 0, \text{在边界上} \end{aligned} \right\} \quad (1-103)$$

式中, $\varphi(x)$ 为待求的梁振型函数, L 和 B 分别为域内 $0 \leq x \leq l$ 和边界上的作用算子, $h(s)$ 为在梁桥的边界上与 $\varphi(s)$ 无关的已知函数, s 为支承点。

方程(1-103)一般较难精确求解,前几节已经讨论的精确解是极其特殊的情况。所以,我们假设方程(1-103)的近似解为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad (1-104)$$

式中, C_i 为待定系数; $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 是一组线性无关的振型函数。由于 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$ 是假设的近似解,将 $\varphi(x)$ 代入方程式(1-103)中,一般不可能精确满足。于是,式(1-103)就出

现了残余值

$$\left. \begin{aligned} R_v &= L(\varphi) - \omega^2 m\varphi, 0 \leq x \leq l \\ R_s &= B(\varphi) - h, \text{在边界上} \end{aligned} \right\} \quad (1-105)$$

式中, R_v 和 R_s 分别称为域内残值和边界残值。

在一般情况下, 我们已不可能使域内残值等于零, 而只能使残值的某种加权平均值等于零, 也就是在域内适当地选择一个函数 $\psi_v(x)$, 使得残值 R_v 与其相应的乘积在域内的积分为零, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l R_v \psi_v dx &= 0, 0 \leq x \leq l \\ R_s &= 0, \quad \text{在边界上} \end{aligned} \right\} \quad (1-106)$$

式中, $\psi_v(x)$ 称为域内权函数。由于梁的边界条件较为简单, 故在预先选择振型函数 $\varphi_i(x)$ 时, 容易满足式(1-106)中的第二式。上述方法称之为域内型加权残值法。

在假设满足边界条件的振型 $\varphi(x)$ 后, 由式(1-106)即可建立固有频率方程, 从而求得 ω_i 和相应的振型参数相对值 C_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)。

按照权函数选取方法的不同, 加权残值可分为多种类型, 更详细的论述可参考其他文献。

1.4 带阻尼的梁桥弯曲固有振动

桥梁结构的阻尼是确定桥梁振动的重要动力参数之一。阻尼消耗能量, 使振动衰减, 对桥梁的安全是有利的。阻尼的大小直接关系到桥梁在动荷载作用下振动的强弱。因此, 研究桥梁的阻尼规律是提高桥梁动力计算精确度的关键之一。

形成桥梁结构阻尼的因素十分复杂, 大致可以认为有两大类, 即结构内部材料或周围介质产生的固有阻尼和特别制造的阻尼器加给结构的外加阻尼。

1.4.1 固有阻尼

在桥梁结构中,固有阻尼主要由以下三部分组成:材料的内阻尼—由桥梁振动时其建筑材料分子间的内摩擦力所形成;摩擦阻尼—由桥梁支座及其连接处的摩擦力等所形成,又称干摩擦阻尼或库仑阻尼;其它介质阻尼—由周围空气介质和与桥墩接触的水对桥梁结构运动的阻力所形成,它与前两者比较,微不足道。

通常用振动一次的能量消耗率来表示结构阻尼的强弱,称之为能量消耗系数 ψ ,即

$$\psi = \frac{\Delta W}{W_1} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} \quad (1-107)$$

式中, W_1 、 W_2 分别为相隔一个周期的振动达到最大振幅时的总能量。

由于这时动能为零,位能达最大值并且与振幅的平方成正比,故

$$W_1 = \frac{1}{2} k y_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} k y_2^2$$

式中, y_1 、 y_2 为相隔一个周期的振幅值,如图 1-18 所示。代入式 (1-107),则有

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = 1 - \frac{(y_1 - \Delta y)^2}{y_1^2} \\ &\approx 2 \frac{\Delta y}{y_1} \quad (1-108) \end{aligned}$$

式中, Δy 为相隔一个周期的先后振幅差

$$\Delta y = y_1 - y_2$$

同时,在式(1-108)中忽略了二阶微量 $(\Delta y)^2$ 的影响。

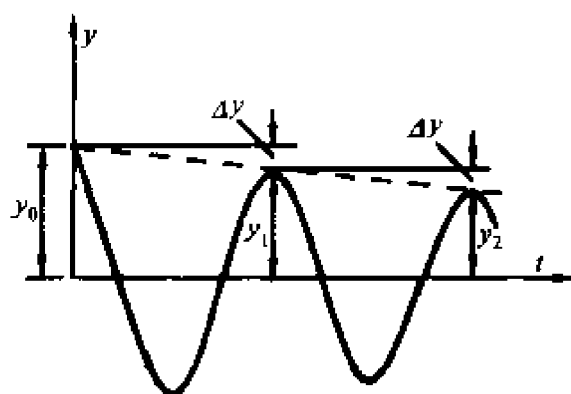


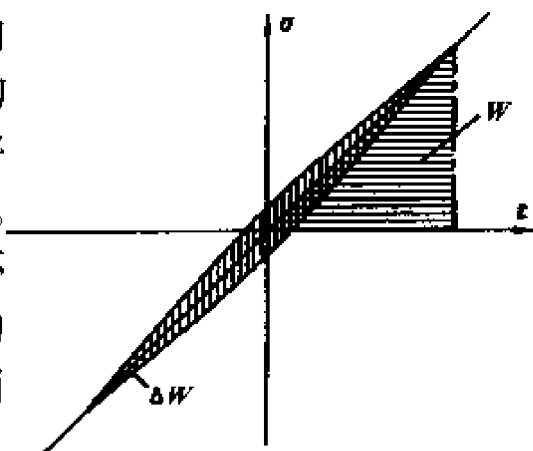
图 1-18 带阻尼振动的衰减曲线

1. 滞变或弹性材料的内阻尼

实验表明,由于材料分子间内摩擦力的作用,弹性材料及其结构有简谐振动时的应力应变曲线将形成一个狭长的滞阻圈(图 1-19)。滞阻圈的面积即表示每一次循环的能量消耗 ΔW_1 ,它与材料总的弹性能 W 之比为内阻尼的能量消耗系数

$$\psi_1 = \frac{\Delta W_1}{W}$$

图 1-19 滞阻圈



ψ_1 与变形速度、振动频率、应力大小、材料尺寸等均无关系而接近于常数。

根据实验资料,公路桥梁建筑材料的 ψ_1 值如表 1-1 所示。显然,混凝土的 ψ_1 较大,因而材料的内阻尼是主要的。

表 1-1

建材种类	ψ_1 取值
钢 材	0.015
钢筋混凝土	0.08

在 ψ_1 为常数的情形下,振幅随时间衰减的包络曲线可求得如下。按式(1-108),振幅在相隔一个周期 τ 的衰减率为

$$\frac{\Delta y}{\tau} = -\frac{\psi_1}{2} \frac{y}{\tau}$$

同时,包络曲线的微商 $\frac{dy}{dt}$ 也就认为等于此值,即

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\psi_1}{2} \frac{y}{\tau}$$

于是,得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\psi_1}{2} \frac{dt}{\tau}$$

积分后为

$$\ln y = -\frac{\psi_1}{2} \frac{t}{\tau} + C$$

设 $t=0$ 时, $y=y_0$, 则

$$C = \ln y_0$$

代入上式后, 得到

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{\psi_1}{2} \frac{t}{\tau}\right) \quad (1-109)$$

上式表明, 振幅将按指数曲线规律衰减。令 $t=\tau$ 代入式(1-109), 即可得出

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} = \cdots = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \exp\left(-\frac{\psi_1}{2}\right) = \text{常数}$$

或

$$\ln \frac{y_{n+1}}{y_n} = -\frac{\psi_1}{2} = -\delta = \text{常数} \quad (1-110)$$

式中, $\delta = \psi_{1/2}$ 称为振动的对数衰减率, 它表示相隔一个周期的前后二次振幅比值的对数。

2. 摩擦阻尼

下面以简支梁桥活动支座为例来说明摩擦阻尼的基本概念。

如图 1-20 所示, 当简支梁发生竖向振动时, 活动支座也将左右往复运动一次。其间支座摩擦力近似地保持为常数。支座运动的路程约与梁的振动振幅成正比。因此, 每经过一个周期, 摩擦力消耗的能量 ΔW 也与振幅成正比。由于振动的总能量与振幅的平方成正比, 因此, 按量纲分析, 摩擦阻尼的能量消耗系数与振幅 y 则成反比, 即

$$\psi_2 = 2 \frac{\Delta y}{y} = \frac{k}{y} \quad (1-111)$$

式中, $k = 2\Delta y = \text{常数}$ 。

从上式可以看出, 随着振幅的衰减, 能量消耗系数将相对地增长。同时也表明, 每隔一个周期, 振幅的衰减 Δy 为常数, 所以振幅包络线为一根向下倾的直线。

3. 其它的阻尼来源

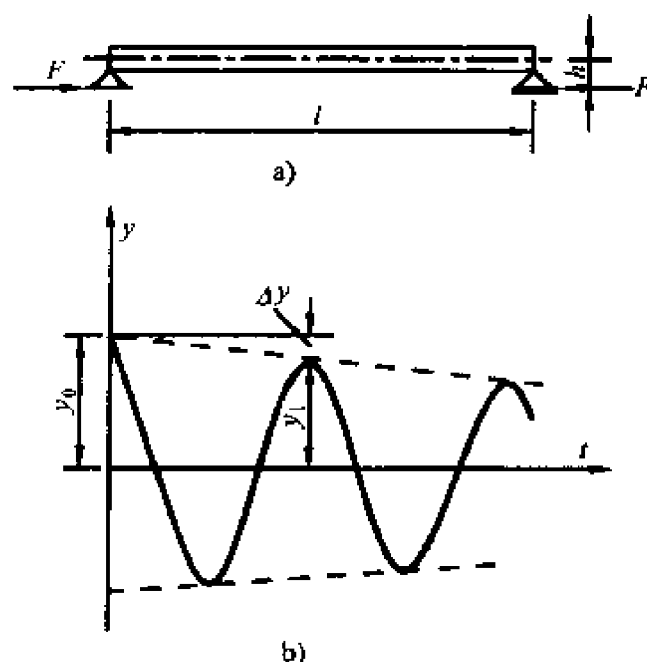


图 1-20 支座处摩擦阻尼的计算图式

一般来说,桥梁结构中阻尼的主要来源是支承点和结构材料。然而,桥梁结构必须在自然环境中工作,这种环境将显著影响到总阻尼。虽然自然环境中空气动力阻尼本身甚小,但对于小阻尼结构,它可能是很重要的。对于深水区域桥墩,同样会受到水的动力阻尼作用。这些小阻尼虽然常常被忽略不计,但它们对结构是有利的。

1.4.2 附加阻尼

如果桥梁结构中的固有阻尼不够大,就可以采用下列两种方法来增加结构阻尼:一种是在桥梁结构上加一个振动阻尼器,另一种是用具有很高阻尼特性的夹层材料来制造结构或结构的一部分。

1. 附加阻尼器和减震器

大多数阻尼装置可能是靠粘滞、干摩擦或滞变效应做成的,其阻尼效果通常都能应用上述理论作出相当好的预计。同时,在许多情况下,它还能进行某种程度的调整。

然而,这些附加阻尼器所起的作用仅在于降低桥梁结构的振动。如果存在特别难办的共振,则应加上一个减震器。减震器就是加在结构上的一个简单的弹簧—质量系统,其参数选择旨在使原有共振频率下的结构振幅大大减小甚至消失。减震器的工作机理,已在结构动力学中介绍过,这里不再叙述。

2. 限制(约束)层阻尼

现有聚合物材料具有很高的阻尼特性,但缺乏足够的刚度,而且也缺乏抗徐变的强度,从而不能用它们制作结构。因此,如取用其高阻尼的优点,就必须使用钢材等刚性材料与层状阻尼材料相粘结的复合构造,这种复合构造一般做成梁或板式结构。将高阻尼材料组合装配起来可用于桥梁结构中,无论如何可作为一部分构件使用,构件中的层状高阻尼粘弹性材料是被粘结在金属层之间的。当复合结构振动时,受限制的阻尼材料层承受剪切效应,它使振动能量被转化为热能,从而耗散能量。

在一块复合结构中,可以用两层、三层、四层、五层或更多层粘弹性材料和金属。每层可以有每层的各自特性、厚度和相对于中性轴的位置,以便作为一个整体复合结构时,具有最理想的结构性能和动力性能。

上述的复合结构往往以支座的形式应用在公路桥梁结构中。

1.4.3 带阻尼的梁桥弯曲固有振动

前两小节的叙述表明,材料内阻尼使结构振动幅值按指数规律随时间衰减,而桥梁结构的摩擦阻尼则使振动幅值按直线规律随时间衰减,二者作用的性质不同,附加阻尼的原理与上述相类似。至于微小的空气介质阻尼和水力阻尼作用的性质则大致与材料内阻尼相似。考虑到实际情况和计算上的方便,在桥梁振动中通常以一种作用性质的阻尼,即使振动幅值按指数衰减的阻尼来代表桥梁的全部阻尼。这种阻尼相当于与振动速度成正比的粘性阻尼。下面就来讨论具有这种阻尼的梁桥弯曲固有振动。

在梁桥固有振动方程(1-18)中,引入与速度 $\dot{y}$ 成正比的阻尼

力 $c\dot{y}$, 则有

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c\dot{y} + m\ddot{y} = 0 \quad (1-112)$$

令

$$y(x, t) = \varphi(x)q(t)$$

分离变量后, 方程(1-112)变为

$$EI \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} q(t) + [c\dot{q}(t) + m\ddot{q}(t)] \varphi(x) = 0$$

或

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - \alpha^4 \varphi(x) &= 0 \\ \ddot{q}(t) + 2\beta\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-113)$$

式中

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{m} \text{ 或 } \alpha^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$$

与式(1-23)相同; $\beta = \frac{c}{2m}$, 称为粘性阻尼衰减系数。式(1-113)第一式的解同(1-25)式, 式(1-113)第二式的解则为

$$q(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (1-114)$$

式中, $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ 称为带阻尼的固有振动频率; A 和 θ 是由初始条件确定的系数。这里要说明的是, 式(1-114)与单自由度带阻尼振动不同, 式(1-114)只是连续体系振动中的某一阶自由振动响应, 它取决于由式(1-25)和边界条件确定的固有振动频率和相应的振型函数 $\varphi(x)$ 。

可见, 粘性阻尼使固有振动的频率稍许降低, 并使振幅按指数曲线衰减, 这在性质上和材料内阻尼是相近的。

比较(1-109)和(1-114)两式可得 $\beta = \frac{\psi_1}{2} \cdot \frac{1}{\tau}$ 。这表示把材料内阻尼以及摩擦阻尼转换成当量的粘性阻尼, 则 β 就不可能是常数, 而是和振动周期 τ 有关。对于钢桥, 有下列由实验统计而得的经验公式

1. Ильясевиц 公式

$$\beta = \frac{5}{\tau} \left(\frac{1.1}{\tau^2} - 1 \right) \times 10^{-3} \quad (1-115)$$

2. Inglis 公式

$$\beta = \frac{3.3}{q} \left[0.12 + 0.0178 \left(\frac{100}{l} \right)^3 \right] \quad (1-116)$$

式中, q 为桥梁每延米的自重; l 为桥梁计算跨径; τ 为振动周期。

利用钢梁桥振动周期 τ 的近似公式, 可以把上面两个经验公式作一对比, 如图 1-21 所示。从图中可以看出, 两者相差很大, 并且都不能很好反映出在图中用黑点表示的实测结果; 而另一方面, 用 $\beta = f(l)$ 表示的实测结果, 其离散性很大。

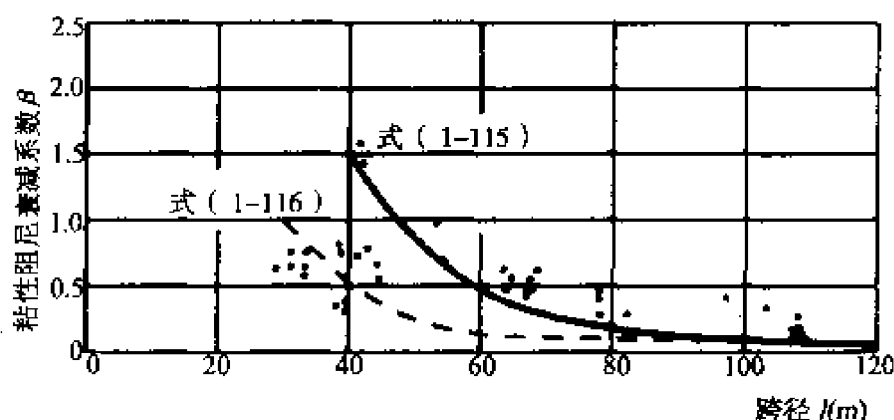


图 1-21 粘性阻尼衰减系数的经验公式

通常, 结构的阻尼值用阻尼比 ζ 表示为

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega}$$

于是, 式(1-114)变为

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= Ae^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_n t + \theta) \\ \omega_n &= \sqrt{1 - \zeta^2} \omega \end{aligned} \right\} \quad (1-117)$$

实测的结果表明, 桥梁阻尼比约在 0.01 ~ 0.10 之间, 表 1-2 ~ 表 1-4 列出了我国 3 座斜拉桥的部分阻尼比数值, 可供计算时参

考。其中,东营大桥为主跨径 $l = 288$ 米的钢斜拉桥,天津永和桥为主跨径 $l = 260$ 米的预应力混凝土斜拉桥,安徽淮河桥为主跨径 $l = 224$ 米的预应力混凝土斜拉桥。

东营大桥振动参数表

表 1-2

序 号	频率(H_z)	振 型	阻 尼 比
1	0.450	竖向	0.014
2	0.625	竖向	0.010
3	0.725	横向	0.026
4	0.925	扭转	0.020
5	1.138	竖向	0.016
6	1.288	横向	0.019

天津永和桥振动参数表

表 1-3

序 号	频率(H_z)	振 型	阻 尼 比
1	0.288	横向	0.032
2	0.430	竖向	0.021
3	0.625	竖向	0.017
4	0.663	横向	0.022
5	0.950	竖向	0.014
6	1.038	扭转	0.017
7	1.188	扭转	0.022
8	1.325	竖向	0.009
9	1.588	竖向	0.013
10	1.763	扭转	0.016

淮河桥振动参数表

表 1-4

序 号	频率(H_z)	振 型	阻 尼 比
1	0.525	竖向	0.089
2	0.675	横向	0.111
3	0.800	竖向	0.050
4	1.175	横向	0.064
5	1.200	扭转	0.022
6	1.325	扭转	0.033
7	1.475	竖向	0.031
8	1.800	竖向	0.018
9	2.050	扭转	0.021
10	2.325	竖向	0.020

由式(1-117)和实桥阻尼比实测值可见,桥梁阻尼比对于结构固有频率影响很小,可以忽略不计。而对于固有振动的振幅来说,则成负指数规律衰减,说明结构阻尼对减小桥梁结构振动是有利的。

为了便于读者区别各种阻尼参数之间的关系,现将它们列于表 1-5 中。

表 1-5

		C	β	ζ	δ	ψ	$\frac{1}{Q}$
粘性阻尼系数	C	1	$2m$	$2m\omega$	$\frac{m\omega}{\pi}$	$\frac{m\omega}{2\pi}$	$m\omega$
衰减系数	β	$\frac{1}{2m}$	1	ω	$\frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{\omega}{4\pi}$	2ω
阻尼比	ζ	$\frac{1}{2m\omega}$	$\frac{1}{\omega}$	1	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{2}$
对数衰减率	δ	$\frac{\pi}{m\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	2π	1	$\frac{1}{2}$	π
能量消耗系数	ψ	$\frac{2\pi}{m\omega}$	$\frac{4\pi}{\omega}$	4π	2	1	2π
消耗因子	$\frac{1}{Q}$	$\frac{1}{m\omega}$	$\frac{1}{2\omega}$	2	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	1

注:能量消耗因子定义为单位弧度的能量消耗率,即 $\frac{1}{Q} = \frac{\psi}{2\pi}$ 。

1.5 定位激励力作用下梁桥的强迫振动

在公路梁桥振动研究中,经常遇到在确定的位置对梁施加一激励力的情况。本节利用梁振型的正交性,通过振型叠加分析,可以求得在确定的位置受任意激励力作用下简单边界条件梁的振动响应。

1.5.1 无阻尼梁的强迫振动

已知无阻尼艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁的振动方程为

$$m(x)\ddot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] = p(x, t)$$

这个非齐次偏微分方程的全解包括两部分:一部分是对应于齐次方程的通解,相当于固有振动,已在1.2.1中讨论过。另一部分是对应非齐次项的特解,在给定激励力 $p(x, t)$ 后,即可求得激励力作用下梁的振动响应。

设梁在给定的端点条件下的固有频率为 ω_n , 相应的振型函数为 $\varphi_n(x)$ 。引进广义坐标 $q_n(t)$, 应用振型叠加方法, 梁在强迫振动下的动挠度 $y(x, t)$ 可表示为振型的级数形式

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t)$$

将上式代入方程(1-6), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(x) \varphi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2}] q_n(t) = p(x, t)$$

利用振型的正交性, 将上式两边同乘以 $\varphi_k(x)$, 然后对 x 自 0 至 l 积分。根据式(1-59)~式(1-61), 左边项中只有当 $k = n$ 时的项存在, 其余均为零。由此可得

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-118)$$

式中

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= \frac{\int_0^l \varphi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2}] dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \frac{\int_0^l EI(x) [\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2}]^2 dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx}\end{aligned}\quad (1-119)$$

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l \varphi_n(x) p(x, t) dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (1-120a)$$

ω_n 即为梁的固有频率, $Q_n(t)$ 为分布激励力 $p(x, t)$ 作用下相应于广义坐标 $q_n(t)$ 的广义激励力。

当梁上 x_i 处作用有集中激励力 $P_i(t)$ 时, 根据积分的意义, 有

$$\begin{aligned}Q_{np}(t) &= \frac{\int_0^l \varphi_n(x) P_i(t) \delta(x - x_i) dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \frac{P_i(t) \varphi_n(x_i)}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx}\end{aligned}\quad (1-120b)$$

当梁上 x_j 处作用有集中激励力矩 $M_j(t)$ 时, 如图 1-22 所示, $M_j(t)$ 相当于两个大小相等、方向相反且作用线相距为 Δx 的一对力 $P_j(t) = \frac{M_j(t)}{\Delta x}$ 的作用。于是, 有

$$Q_{Mj}(t) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^l [\varphi_n(x) \frac{M_j(t)}{\Delta x} \delta[x - (x_j + \Delta x)] - \varphi_n(x) \frac{M_j(t)}{\Delta x} \delta(x - x_j)] dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_n(x_j + \Delta x) \frac{M_j(t)}{\Delta x} - \varphi_n(x_j) \frac{M_j(t)}{\Delta x}}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \\
&= \frac{M_j(t) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x_j + \Delta x) - \varphi_n(x_j)}{\Delta x}}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \\
&= \frac{M_j(t) \varphi_n'(x_j)}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (1-120c)
\end{aligned}$$

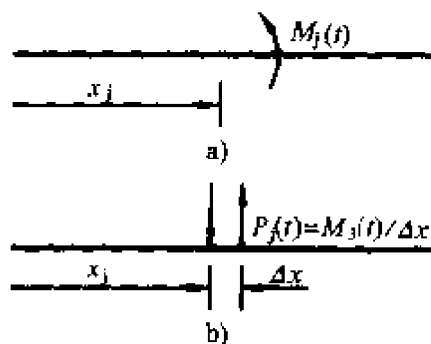


图 1-22

方程组(1-118)是由无限多个独立的微方程组成,和单自由度体系的强迫振动形式完全相同。因此,可直接利用已掌握的单自由度体系的方法,得到式(1-118)的解答。

设初始条件为

$$\begin{aligned}
t = 0 \quad y(x, 0) &= y_0(x) \\
\dot{y}(x, 0) &= \dot{y}_0(x)
\end{aligned}$$

则

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_{n0}$$

将上式两边同乘以 $m(x) \varphi_k(x) dx$, 然后对 x 自 0 到 l 积分, 并利用振型正交性, 可得

$$q_{n0} = \frac{\int_0^l m(x) \varphi_n(x) y_0(x) dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (1-121a)$$

同样方法可得

$$\dot{q}_{n0} = \frac{\int_0^l m(x) \varphi_n(x) \dot{y}_0(x) dx}{\int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (1-121b)$$

将式(1-120)、(1-121)各式代入任意激励力作用下的单自由度体系的响应公式, 得

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \left[q_{n0} \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_{n0}}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \right] \quad (1-122)$$

上式中,前两项是体系仅在初始条件下的响应,后面积分项为杜哈美(Duhamel)积分法求得的任意激励力作用下的响应。 $Q_n(t)$ 根据作用在梁上的激励力特性分别按式(1-120a)~(1-120c)求得。如果同时具有几种不同种类的激励力作用于梁上,则 $Q_n(t)$ 取它们的叠加。

上述分析方法,习惯上称之为振型分析法。下面举例说明振型分析法的应用。

例 1.5.1 用振型分析法考察简支梁在 $x = a$ 处带有集中质量 M_0 时的固有振动特性。

假设简支梁为均质等截面,有效外荷载为

$$P(t) = -M_0 \ddot{y}(a, t) = -M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(a) \ddot{q}_i(t)$$

由式(1-120b),广义激励力

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{\int_0^l P(x, t) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \frac{\int_0^l P(t) \delta(x - a) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx} \\ &= - \frac{M_0 \varphi_n(a) \sum_i \varphi_i(a) \ddot{q}_i(t)}{M_{en}} \end{aligned}$$

式中, $M_{en} = \int_0^l m \varphi_n^2(x) dx$, 为梁的等效质量。于是,振动方程(1-118)可写为

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = - \frac{M_0 \varphi_n(a)}{M_{en}} \sum_i \varphi_i(a) \ddot{q}_i(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

令 $q_i(t) = \hat{q}_i \sin \hat{\omega} t$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 并代入上式, 有

$$(\omega_n^2 - \hat{\omega}^2) \hat{q}_n = \frac{\hat{\omega}^2 M_0 \varphi_n(a)}{M_{en}} \sum_i \hat{q}_i \varphi_i(a)$$

因此, 有方程

$$M_{en}(\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \hat{q}_n + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_n(a) \sum_i \hat{q}_i \varphi_i(a) = 0$$

在实际应用时, 取有限项即令 $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 上述方程可写出 N 个与之相应, 即有关于 $\hat{q}_i$ 的齐次线性方程组

$$\left. \begin{aligned} [(\hat{\omega}^2 - \omega_1^2) M_{e1} + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1^2(a)] \hat{q}_1 + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1(a) \varphi_2(a) \hat{q}_2 \\ + \dots + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1(a) \varphi_N(a) \hat{q}_N = 0 \\ \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_2(a) \varphi_1(a) \hat{q}_1 + [(\hat{\omega}^2 - \omega_2^2) M_{e2} + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_2^2(a)] \hat{q}_2 \\ + \dots + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_2(a) \varphi_N(a) \hat{q}_N = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_N(a) \varphi_1(a) \hat{q}_1 + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_N(a) \varphi_2(a) \hat{q}_2 \\ + \dots + [(\hat{\omega}^2 - \omega_N^2) M_{eN} + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_N^2(a)] \hat{q}_N = 0 \end{aligned} \right\}$$

令上述方程组的系数行列式为零, 即得频率方程, 可求出 N 个 $\hat{\omega}_i^2$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)。将已求得的 N 个 $\hat{\omega}_i^2$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) 代回上述方程组, 可求出相应于每一个 $\hat{\omega}_i^2$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) 的相对值列向量 $\{\hat{q}\}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)。 $\hat{\omega}_i^2$ 即为有附加质量 M_0 的第 i 阶固有频率近似值, $\{\hat{q}\}_i = \{\hat{q}_{1i} \quad \hat{q}_{2i} \quad \hat{q}_{3i} \dots \hat{q}_{Ni}\}^T$ 即为相应的振型。当 N 取得愈大, 所得的解也愈精确。振型改变为

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(x) &= \sum_{i=1}^N \hat{q}_{1i} \varphi_i(x) \\ \hat{\varphi}_2(x) &= \sum_{i=1}^N \hat{q}_{2i} \varphi_i(x) \\ \hat{\varphi}_3(x) &= \sum_{i=1}^N \hat{q}_{3i} \varphi_i(x) \\ &\vdots \\ \hat{\varphi}_N(x) &= \sum_{i=1}^N \hat{q}_{Ni} \varphi_i(x) \end{aligned}$$

式中, $\varphi_i(x)$ 为无附加质量 M_0 时的振型, 相应的频率为 ω_i ; $\hat{\varphi}_j(x)$ 为带有附加集中质量 M_0 的近似振型, 相应的近似频率为 $\hat{\omega}_j$ 。

设 $N=1$, 则频率方程为

$$(\omega_1^2 - \hat{\omega}^2) M_{e1} = \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1^2(a)$$

解之, 得

$$\hat{\omega}^2 = \frac{M_{e1} \omega_1^2}{M_{e1} + M_0 \varphi_1^2(a)}$$

或

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{M_0}{M_{e1}} \varphi_1^2(a)}$$

对于 $\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$, 则有 $M_{e1} = \frac{ml}{2} = \frac{M}{2}$, 于是有

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{2M_0}{M} \varphi_1^2(a)}$$

假设 $a = l/3$, 则 $\varphi_1(a) = \sin \frac{\pi}{3} = 0.866$, 代入上式, 得

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1.5M_0}{M}}, \text{ 即 } \hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1.5M_0}{M}}}$$

当 $M_0 = M$ 时, 则 $\hat{\omega}_1 \approx 0.63\omega_1$ 。当然, 这个近似值是只取 $N=1$ 时求得的。

再令 $N=2$, 则有频率方程

$$\left. \begin{aligned} [(\hat{\omega}^2 - \omega_1^2) M_{e1} + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1^2(a)] \hat{q}_1 + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_1(a) \varphi_2(a) \hat{q}_2 &= 0 \\ \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_2(a) \varphi_1(a) \hat{q}_1 + [(\hat{\omega}^2 - \omega_2^2) M_{e2} + \hat{\omega}^2 M_0 \varphi_2^2(a)] \hat{q}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

当取 $a = l/3$ 时, $\varphi_1(a) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_2(a) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 有

$$M_{e1} = M_{e2} = \frac{ml}{2} = \frac{M}{2}$$

则上式变成

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{4} M_o \hat{\omega}^2 + \frac{M}{2} \hat{\omega}^2 - \frac{M}{2} \omega_1^2 \right) \hat{q}_1 + \frac{3}{4} M_o \hat{\omega}^2 \hat{q}_2 &= 0 \\ \frac{3}{4} M_o \hat{\omega}^2 \hat{q}_1 + \left(\frac{3}{4} M_o \hat{\omega}^2 + \frac{M}{2} \hat{\omega}^2 - 16 \cdot \frac{M}{2} \omega_1^2 \right) \hat{q}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

于是频率方程为

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{3}{4} M_o + \frac{M}{2} \right) - \frac{M}{2} & \frac{3}{4} M_o \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 \\ \frac{3}{4} M_o \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 & \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{3}{4} M_o + \frac{M}{2} \right) - 8M \end{vmatrix} = 0$$

同样,令 $M_o = M$, 则上式为

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{4} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 - \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 \\ \frac{3}{4} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 & \frac{7}{4} \left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 - 8 \end{vmatrix} = 0$$

解之得

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_1} \right)^2 = \frac{5.95 \pm 5.4}{2}$$

即

$$\hat{\omega}_1 = 0.525\omega_1, \hat{\omega}_2 = 2.37\omega_1, \hat{\omega}/\hat{\omega}_1 = 4.55$$

这里 $\hat{\omega}_1 = 0.525\omega_1$ 可以看作是第二次近似值, $\hat{\omega}_2 = 2.37\omega_1$ 可以看作是第一次近似值。显然,二次近似值比一次精度要高。当 N 取 3 或 4 时,大致可获得比较满意的 $\hat{\omega}_1$ 值。对于高阶频率,则 N 要逐步取得更大才能获得满意的近似解。与 1.3 中的能量法相比,求低阶固有频率近似值显得麻烦。

例 1.5.2 用振型分析法考察简支梁在 $x = a$ 处连结一支承弹簧后的固有振动特性。

弹簧抗力为

$$F_s = -ky(a, t)$$

同样,由式(1-120b),广义激励力

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l F_s \delta(x-a) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx} \\ = - \frac{k \varphi_n(a) \sum_i \varphi_i(a) q_i(t)}{M_{en}}$$

振动方程(1-118)可写为

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = - \frac{k}{M_{en}} \varphi_n(a) \sum_i \varphi_i(a) q_i(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

令 $q_i(t) = \hat{q}_i \sin \hat{\omega} t$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 并代入上式, 则有

$$(\hat{\omega}^2 - \omega_n^2) \hat{q}_n = \frac{k}{M_{en}} \varphi_n(a) \sum_i \varphi_i(a) \hat{q}_i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

当 n 和 i 均取到 N , 则上式的展开式为

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{M_{e1}}{k} (\omega_1^2 - \hat{\omega}^2) + \varphi_1^2(a) \right] \hat{q}_1 + \varphi_1(a) \varphi_2(a) \hat{q}_2 \\ & \quad + \dots + \varphi_1(a) \varphi_N(a) \hat{q}_N = 0 \\ & \varphi_2(a) \varphi_1(a) \hat{q}_1 + \left[\frac{M_{e2}}{k} (\omega_2^2 - \hat{\omega}^2) + \varphi_2^2(a) \right] \hat{q}_2 \\ & \quad + \dots + \varphi_2(a) \varphi_N(a) \hat{q}_N = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \varphi_N(a) \varphi_1(a) \hat{q}_1 + \varphi_N(a) \varphi_2(a) \hat{q}_2 \\ & \quad + \dots + \left[\frac{M_{eN}}{k} (\omega_N^2 - \hat{\omega}^2) + \varphi_N^2(a) \right] \hat{q}_N = 0 \end{aligned} \right\}$$

令上面方程组的系数行列式为零, 可求得 N 个 $\hat{\omega}^2$ 的根及相应的 N 个相对值列向量 $\{\hat{q}\}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)。振型的表示形式同例 1.5.1。

如取 $N = 1$, 则有

$$\frac{M_{e1}}{k} (\omega_1^2 - \hat{\omega}^2) + \varphi_1^2(a) = 0$$

解之, 得

$$\hat{\omega}^2 = \varphi_1^2(a) \frac{k}{M_{cl}} + \hat{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + \frac{2k}{M} \varphi_1^2(a)$$

即

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{2k}{M} \varphi_1^2(a)}$$

式中, $M = ml$ 。

显而易见, 上式同样是近似值。对于基频, N 取到 3 或 4 时, 大致可获得较好的近似值。对于高阶频率, 则 N 要逐步增大, 方可获得满意的近似解。

1.5.2 有阻尼梁的强迫振动

如 1.4 节所述, 将梁桥结构的总阻尼简化为粘性阻尼 c , 将方程(1-6)左边加上阻尼力 $c\dot{y}$ 一项, 即得梁的振动方程为

$$m(x)\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] = p(x, t) \quad (1-123)$$

设梁的动挠度为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) q_i(t)$$

将上式代入式(1-123), 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} m(x) \varphi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c \varphi_i(x) \dot{q}_i(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2}] q_i(t) = p(x, t) \end{aligned}$$

利用振型的正交性, 将上式两边同乘以 $\varphi_n(x) dx$, 然后对 x 自 0 到 l 积分。根据(1-59)式 ~ (1-61)式可得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \int_0^l c \varphi_i(x) \varphi_n(x) dx / \int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx \\ + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1-124)$$

式中, ω_n^2 和 $Q_n(t)$ 同式(1-119)和(1-120)。

现假设 $c = 2\beta m(x)$, β 为常数。由振型正交性, 式(1-124)左边第二项可写成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \int_0^l 2\beta m(x) \varphi_i(x) \varphi_n(x) dx / \int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx \\ &= \dot{q}_n(t) \int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx \cdot 2\beta / \int_0^l m(x) \varphi_n^2(x) dx \\ &= 2\beta \dot{q}_n(t) \end{aligned}$$

则式(1-124)可写成

$$\ddot{q}_n(t) + 2\beta \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (1-125)$$

再令

$$\zeta_n = \frac{\beta}{\omega_n} \quad (1-126)$$

则式(1-125)变为

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-127)$$

式中, ζ_n 为第 n 阶阻尼比, 其余同前。仿单自由度体系振动方程的解可得

$$\begin{aligned} q_n(t) = & \exp(-\zeta_n \omega_n t) \left[q_{no} \cos \omega_{nd} t + \frac{\dot{q}_{no} + \zeta_n \omega_n q_{no}}{\omega_{nd}} \sin \omega_{nd} t \right] \\ & + \frac{1}{\omega_{nd}} \int_0^t \exp[-\zeta_n \omega_n (t - \tau)] Q_n(\tau) \sin \omega_{nd} (t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-128)$$

式中, $\omega_{nd} = \sqrt{1 - \zeta_n^2} \omega_n$, 为带阻尼的固有振动频率。初始值 q_{no} 及 $\dot{q}_{no}$ 可由式(1-121)求得。最后可得前 N 个振型叠加的近似解为

$$y(x, t) \approx \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t) \quad (1-129)$$

式(1-127)中的 β 就是 1.4.3 小节中介绍的粘性阻尼衰减系数, 一般可由相应于第一阶振型的阻尼比来确定。

例 1.5.3 在等截面均质简支梁的跨中作用一个简谐力 $F_1 \cos \Omega_p t$, 如图 1-23 所示。求梁的动力响应。

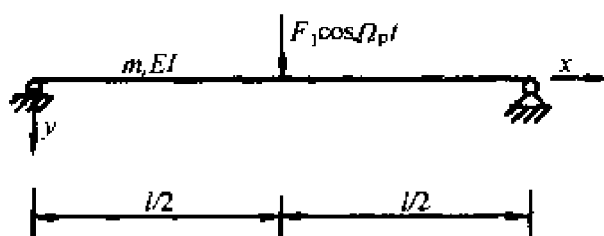


图 1-23

由式(1-31)可知简支梁的振型函数为

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

积分因子为

$$\int_0^l \varphi_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

则由式(1-120b), 广义激励力

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{2F_1}{ml} \int_0^l \cos \Omega_p t \varphi_n(x) \delta(x - l/2) dx \\ &= \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \Omega_p t \end{aligned}$$

于是, 式(1-127)变为

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \Omega_p t \quad (1-130)$$

当 $\zeta_n < 1$ 时, 则上式对应的齐次方程的通解为

$$q_{nd}(t) = \exp(-\zeta_n \omega_n t) (C_1 \sin \omega_{nd} t + C_2 \cos \omega_{nd} t) \quad (1-131)$$

式中, $\omega_{nd} = \sqrt{1 - \zeta_n^2} \omega_n$

设式(1-130)的特解为

$$q_{n2}(t) = G_1 \sin \Omega_p t + G_2 \cos \Omega_p t$$

代入方程(1-130), 得

$$\begin{aligned} & [(\omega_n^2 - \Omega_p^2) G_1 - 2\zeta_n \omega_n \Omega_p G_2] \sin \Omega_p t \\ & + [2\zeta_n \omega_n \Omega_p G_1 + (\omega_n^2 - \Omega_p^2) G_2 - \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2}] \cos \Omega_p t = 0 \end{aligned}$$

因为正弦与余弦函数等于零的时间是不同的,所以,为了使上式成立,它们的系数必须为零。于是,可得

$$\left. \begin{aligned} (\omega_n^2 - \Omega_p^2) G_1 - 2\zeta_n \omega_n \Omega_p G_2 &= 0 \\ 2\zeta_n \omega_n \Omega_p G_1 + (\omega_n^2 - \Omega_p^2) G_2 &= \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-132)$$

解之,得

$$G_1 = \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{2\zeta_n \frac{\Omega_p}{\omega_n}}{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}}$$

$$G_2 = \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}}{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}}$$

由此可得

$$q_{n2}(t) = \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}) \cos \Omega_p t + 2\zeta_n \frac{\Omega_p}{\omega_n} \sin \Omega_p t}{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}} \quad (1-133)$$

于是,方程(1-130)的全解为

$$q_n(t) = q_{n1}(t) + q_{n2}(t)$$

梁受跨中激扰力的振动响应为

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \exp(-\zeta_n \omega_n t) (C_1 \sin \omega_{nd} t + C_2 \cos \omega_{nd} t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}) \cos \Omega_p t + 2\zeta_n \frac{\Omega_p}{\omega_n} \sin \Omega_p t}{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}} \right\} \end{aligned} \quad (1-134)$$

上式中的常数 C_1 和 C_2 可通过初始条件确定。

式(1-134)中的第一项表示梁对外荷载的瞬态响应。但是,由于阻尼的存在,振幅因子 $\exp(-\zeta_n \omega_n t)$ 很快就会消失,在通常情况下其意义不大。式中的第二项为与外荷载同频率但不同相位的稳态响应。振动体系从开始振动到稳态振动的那一段振动是处于过渡状况,振幅和周期都在变化,所以称作非稳态振动或过渡态振动。过渡态的振幅的最大值会大于稳态振幅的,但它会逐渐衰减而小于后者,衰减的快慢程度随 $\zeta_n \omega_n$ 的大小而定。

设稳态响应形式为

$$y_F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} A_n \sin(\Omega_p t + \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

利用三角函数的性质,可得

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}}} \\ \operatorname{tg} \theta_n &= \frac{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}}{2\zeta_n \frac{\Omega_p}{\omega_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1-135)$$

当 $n=1$ 时,有

$$y_{F1}(x, t) = \frac{2F_1}{ml} \frac{1}{\omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2})^2 + 4\zeta_1^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}}} \sin(\Omega_p t + \theta_1) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-136a)$$

由于 $\frac{2F_1 l^3}{Eh\pi^4} \approx \frac{F_1 l^3}{48EI}$, 相当于集中力 F_1 静态作用于跨中时梁的跨中挠度,则

$$y_{F1}(x, t) = y_{st}(l/2) \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin(\Omega_p t + \theta_1)}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2})^2 + 4\zeta_1^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}}} \quad (1-136b)$$

式中, $y_{st}(l/2) = \frac{F_1 l^3}{48EI}$; $\omega_1^2 = (\frac{\pi}{l})^4 \frac{EI}{m}$ 。

当 $x = l/2$ 时, 由式(1-136b)可得动力最大挠度为

$$y_{1dyn}(\frac{l}{2}) = \mu_d y_{st}(\frac{l}{2}) \quad (1-137)$$

式中, μ_d 为动力放大系数, 与激振频率 Ω_p 的关系为

$$\mu_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2})^2 + 4\xi_1^2 \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}}} \quad (1-138)$$

如图 1-24 所示。

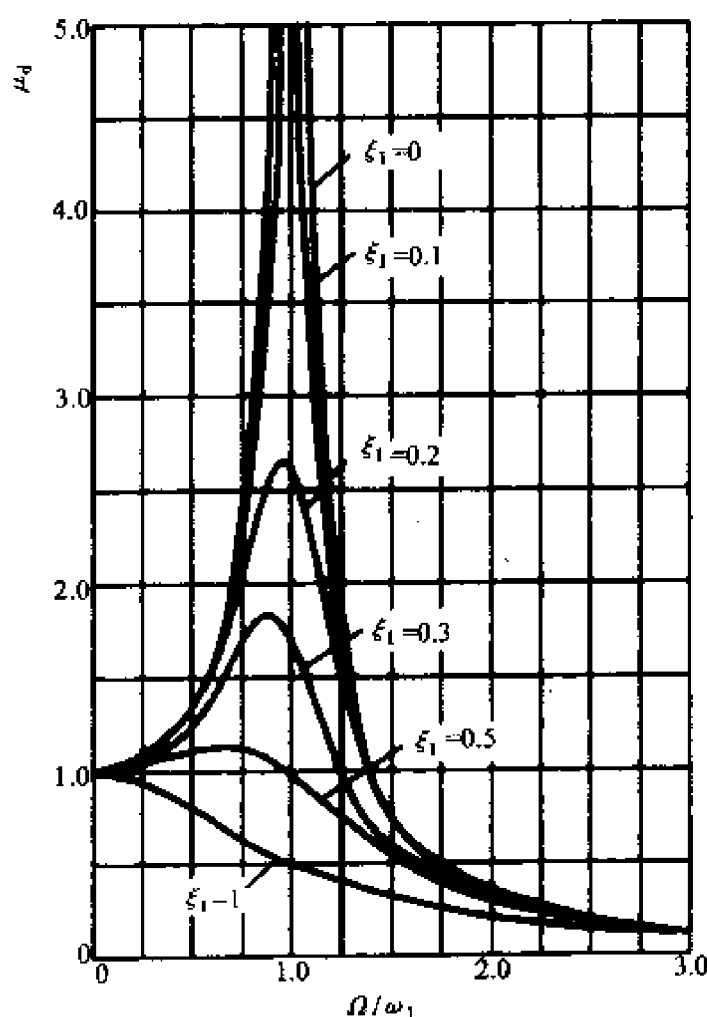


图 1-24

当 $\omega_1 = \Omega_p$ 时,由式(1-138)可得共振时梁的动力放大系数为

$$\mu_d = \frac{1}{2\zeta_1} \quad (1-139)$$

说明梁共振时动挠度取决于阻尼比 ζ_1 的大小,与其成反比的关系。因此,增大梁的阻尼可以显著减小梁的振动幅值。

当不计阻尼时,即 $\zeta_n = 0$,方程(1-130)可以简化,其解答可从式(1-134)中令 $\zeta_n = 0$ 求得

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[(C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t) + \frac{2F_1}{ml} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_n^2}} \cos \Omega_p t \right] \quad (1-140)$$

上式中第一项表示梁对外荷载的瞬态响应, C_1 和 C_2 可通过初始条件确定。第二项为与外荷载同频率、同相位的稳态响应。

当 $n = 1$ 时,有

$$y_1(x, t) = \sin \frac{\pi x}{l} \left(C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t + \frac{2F_1}{ml} \frac{1}{\omega_1^2} \frac{\cos \Omega_p t}{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}} \right)$$

设 $t = 0$ 时, $y_1(x, 0) = \dot{y}_1(x, 0) = 0$, 则有

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = - \frac{2F_1}{ml} \frac{1}{\omega_1^2} \frac{1}{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}}$$

所以,有

$$y_1(x, t) = \frac{2F_1}{ml\omega_1^2} \frac{1}{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}} (\cos \Omega_p t - \cos \omega_1 t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-141)$$

同式(1-136b),引入梁跨中受静态作用的集中力 F_1 时,相应的跨

中挠度 $y_{st}(l/2) = \frac{F_1 l^3}{48EI} \approx \frac{2F_1 l^3}{EI\pi^4}$, 则

$$y_{\text{ldyn}}\left(\frac{l}{2}, t\right) = y_{\text{st}}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega_1^2}} (\cos \Omega_p t - \cos \omega_1 t) \quad (1-142)$$

上式中的第一项为纯粹的强迫振动响应,第二项为外力引起的梁的自由振动响应。在实用上与实际值接近的上限可假定在某个时刻 $\cos \Omega_p t = 1$ 或 $\cos \omega_1 t = -1$, 即 $(\cos \Omega_p t - \cos \omega_1 t) = 1$, 有

$$y_{\text{ldyn}}\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\text{st}}\left(\frac{l}{2}\right) \cdot \mu_d$$

即

$$\mu_d = \frac{1}{1 - \Omega_p^2 / \omega_1^2} \quad (1-143)$$

称为无阻尼的梁的动力放大系数。当 $\omega_1 = \Omega_p$ 时, $\mu_d \rightarrow \infty$, 其振幅值无限大。但实际梁中总是存在着阻尼, 因此, 无阻尼梁仅是一种理想的理论模型。

此外, 上述讨论中取用了梁振动的一阶振型函数。由于一阶振动是主要部分, 上述分析不失一般性。

1.6 梁桥的车辆强迫振动

上一节例 1.5.3 讨论的强迫振动问题, 是以简单梁在位置固定的周期性扰动力作用下的强迫振动问题为对象。当扰动的频率与体系的某一阶固有频率相等时则发生共振。此时, 振幅将随时间逐步增大至一个相当大的数量。阻尼愈小, 则共振时的振幅愈大, 而达到最大振幅所需的干扰力的周数也愈多。

研究梁桥在移动车辆荷载下的强迫振动, 也要分析其共振条件。所不同的是由于荷载是移动的, 而且车辆荷载本身也是一个带有质量的振动系统, 使桥梁—车辆耦合系统的动力特性随荷载位置的移动而不断变化, 其结果是共振条件只能在短时间内满足, 并且车辆荷载在桥上通过的时间也是有限的。这是桥梁的车辆激振问题的特点和复杂性所在, 给理论分析带来了极大的困难。

自从工程师们从试验中了解到一个移动的荷载通过桥梁时将

比相同荷载静止作用时产生较大的挠度和应力以后,从理论上确定在移动车辆荷载作用下桥梁的动力响应,一直是工程师们感兴趣的课题。然而,在电子计算机问世以前的时期所建立起来的古典车辆振动分析理论,只能对简化的车辆和桥梁模型进行近似的定性分析。在本节中,我们将介绍一些最有意义的古典分析方法,以了解移动车辆荷载下桥梁振动的基本现象和机理。在本节最后,介绍了在匀速运动的双轴汽车荷载作用下梁桥动挠度分析的近期研究成果。这里仅研究荷载在梁上的情况,即 $0 < t \leq l/u$ 。

1.6.1 匀速移动常量力的作用

1905年,俄国学者 Крылов 首先研究了在匀速常量力作用下简支梁的振动问题。由于忽略了移动荷载质量,避免了变系数微分方程求解的困难,对于车辆质量与桥梁质量相比较小的情况(如较大跨径的公路桥梁),可以给出动力响应的近似解。

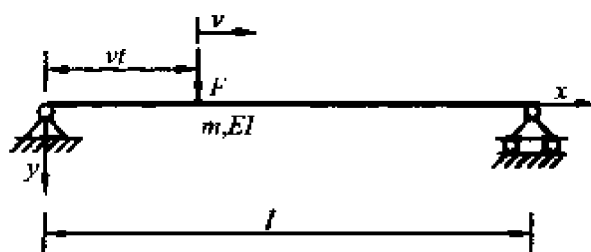


图 1-25 匀速移动常量力的作用模型

图 1-25 表示常量力 F 匀速通过简支梁的情况。假设在时间 $t=0$ 时,常量力 F 位于左边支承处;在时间 t 时,常量力 F 将移动到距左边支承点 $x = vt$ 处。

简支梁在外荷载 $p(x, t)$ 作用下的振动方程可表示为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \ddot{y} = p(x, t) \quad (1-144)$$

式中, EI 为梁的挠弯刚度,假定为常数; m 为梁单位长度上的质量,亦假定为常数;且暂不计梁的阻尼影响。

设梁强迫振动的动位移 $y(x, t)$ 可表示为振型的级数形式

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t) \quad (1-145)$$

由式(1-118) ~ 式(1-120), 可得到解耦的强迫振动方程为

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-146)$$

式中

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^l \left[\frac{d^2 \varphi_n(x)}{dx^2} \right]^2 dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx}$$

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l p(x, t) \varphi_n(x) dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx}$$

对于简支梁, 有

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

因此, 对匀速移动的常量力 F , 广义激励力为

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l F \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \frac{\int_0^l F \delta(x - vt) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{m \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx}$$

$$= \frac{2F}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-147)$$

于是, 方程(1-146)可写成

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2F}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-148)$$

当初始条件为静止时, 可得上式的解为

$$q_n(t) = \frac{2F}{mk\omega_n^2} \frac{1}{1 - \frac{\Omega_n^2}{\omega_n^2}} (\sin\Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin\omega_n t) \quad (1-149)$$

式中, $\omega_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$ 为简支梁的固有振动频率;

$\Omega_n = \frac{n\pi v}{l}$, 可以理解为移动常量的广义扰动频率。

于是, 梁的动力响应可表达为

$$y(x, t) = \frac{2F}{ml} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega_n^2} (\sin\Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \sin\omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1-150)$$

式中, 括号中的前一项代表强迫振动, 后一项则为自由振动。

在实际桥梁中, 荷载通过桥梁的时间通常远大于桥梁的基本周期, 即 $\frac{l}{v} \gg T_1$, 或 $\Omega_n \ll \omega_1$ 。

若仅取级数的第一项来讨论, 此时

$$\Omega_1 = \frac{\pi v}{l}, \omega_1 = (\frac{\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

对于跨中挠度, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi l/2}{l} = 1$, 则式(1-150)将给出如图 1-26 所示的振动曲线。

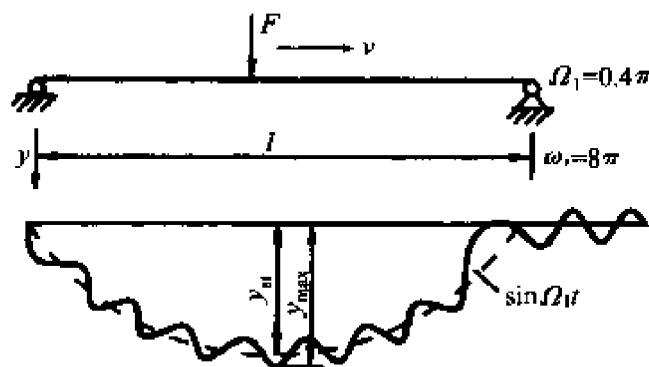


图 1-26 跨中一阶动挠度曲线

图中的虚线为强迫振动部分,它非常接近于荷载静力“缓行”时的挠度。常量力 F 离开桥跨以后的振动就是式(1-150)中自由振动项的延伸。

引入符号

$$r^2 = \frac{EI}{m}, \alpha = \frac{\Omega_1}{\omega_1} = \frac{vl}{\pi r}$$

并假设在最不利情况下的强迫振动振幅和自由振动振幅正好叠加起来。这样,简支梁跨中的最大动挠度可简写为

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{2F}{ml} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} \left(1 + \frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) \\ &= \frac{2Fl^3}{m\pi^2} \frac{1}{\pi^2 r^2 - v^2 l^2} \left(1 + \frac{vl}{\pi r}\right) \\ &= \frac{2Fl^3}{El\pi^4} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{2Fl^3}{El\pi^4} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned} \quad (1-151)$$

注意到上式中的 $\frac{2Fl^3}{El\pi^4} \approx \frac{Fl^3}{48EI}$, 相当于 F 作用在简支梁跨中时的跨中静力挠度, 于是有

$$\mu_d = \frac{y_{\max}}{y_{st}} = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (1-152)$$

即为移动常量力的动力效应。

下面讨论两种特殊情况:

1. 如果常量力 F 的移动速度非常小, 即令 $v \rightarrow 0$ 和 $vt = x_1$, 则式(1-150)中的强迫振动项可写成

$$y = \frac{2Fl^3}{El\pi^4} \sum_{n=1}^N \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x_1}{l}}{n^4(1 - \alpha^2/n^2)} \quad (1-153)$$

与常量力 F 作用在 x_1 处产生静挠度相应的级数表达式

$$y_{st} = \frac{2Fl^3}{El\pi^4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \quad (1-154)$$

相比, 移动常量力的“动力效应”相当于在简支梁的 x_1 处作用静力 F 产生的挠度每项放大 $\frac{1}{1 - \alpha^2/n^2}$ 。当 $N = 1$ 时, 相当于式(1-143)

的动力放大系数。

2. 当移动速度增大到使 $\alpha^2 = 1$ 而发生共振时, 即

$$v^2 l^2 = r^2 \pi^2$$

或

$$\Omega_1 = \frac{\pi v}{l} = \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

得临界速度

$$v_c = \frac{2l}{T_1} \text{ 或 } T_1 = \frac{2l}{v_c}$$

即当常量力 F 通过整个梁所需的时间等于梁的基本周期一半时, 将满足梁的共振条件。此时, 式(1-150)的级数第一项

$$y = \frac{2F}{ml} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin \Omega_1 t - \frac{\Omega_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} \quad (1-155)$$

将具有 $\frac{0}{0}$ 的形式, 由罗必达法则, 有

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \frac{1}{\pi}} = \frac{Fl \sin \frac{\pi x}{l}}{m\pi^2 v^2} \left(\sin \frac{\pi v t}{l} - \frac{\pi v t}{l} \cos \frac{\pi v t}{l} \right)$$

当 $t = l/v$ 时, 上式具有极大值

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{Fl \sin \frac{\pi x}{l}}{m\pi^2 v^2} \left(\sin \frac{\pi v t}{l} - \frac{\pi v t}{l} \cos \frac{\pi v t}{l} \right)_{t=\frac{1}{v}} \\ &= \frac{Fl^3}{EI\pi^3} \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \quad (1-156)$$

有趣的是, 最大动挠度(振幅)发生在当常量力即将离开梁的瞬间(图 1-27)。此时, 常量力所产生的静挠度等于零。而动挠度的幅值

$$y_{\text{dyn}}^{1/2} = \frac{Fl^3}{EI\pi^3} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2Fl^3}{EI\pi^4} \right) = \frac{\pi}{2} y_{\text{st}} \left(\frac{l}{2} \right) \quad (1-157)$$

相当于比常量力 F 作用于跨中所产生的静挠度约大 50%。

根据 EMPA 对简支梁桥基本周期的实测统计, 可近似地按 f_1

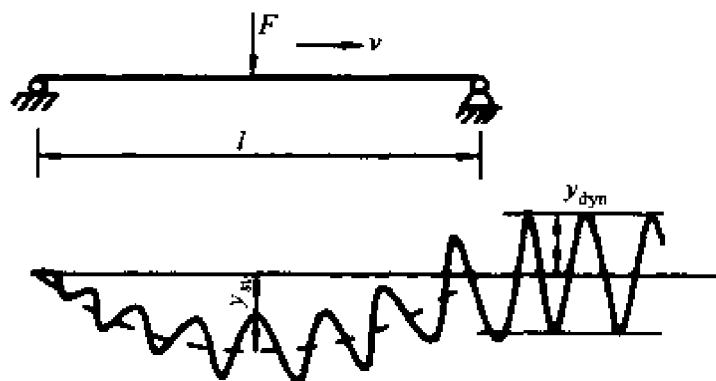


图 1-27 匀速移动常量力通过简支梁桥的反应

$= 100/l$ 或用周期 $T_1 = l/100$ 计算。因此,移动常量力的共振条件必须以

$$v_c = \frac{2l}{T_1} = \frac{2l}{l/100} = 200\text{m/s (即 } 720\text{km/h)}$$

的高速度才能满足。现在的行车速度还小得多,将来即使达到了这个速度,也是一瞬即逝,影响极小。

如果考虑粘性阻尼,式(1-148)的左边将增加一阻尼力项 $2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t)$ 。此时式(1-150)所表示的动力响应将改写成

$$\begin{aligned} y(x, t) = \frac{2F}{ml} \sum_{n=1}^N \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4\zeta_n^2\omega_n^2\Omega_n^2} \{ & (\omega_n^2 - \Omega_n^2)\sin\Omega_n t \\ & - 2\zeta_n\omega_n\Omega_n\cos\Omega_n t + e^{-\zeta_n\omega_n t} [2\zeta_n\omega_n\Omega_n\cos\Omega_n t \\ & + \frac{\Omega_n}{\omega_n}(2\zeta_n^2\omega_n^2 - \Omega_n^2 - \omega_n^2)\sin\omega_n t] \} \end{aligned} \quad (1-158)$$

式中,大括号中的第一项和第二项为强迫振动的稳态部分,第三项为强迫振动所伴生的衰减自由振动项; $\frac{1}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + 4\zeta_n^2\omega_n^2\Omega_n^2}$ 为放大系数因子。

上式中,若令 $\zeta_n = 0$ 即回到式(1-150)。当存在阻尼时,只有半个周期的时间($t = \frac{1}{v_c} = \frac{T_1}{2}$),不可能使振幅达到共振条件下的

峰值。所以,移动常量力的动力效应是十分微小的,因而并没有实际的意义。

1.6.2 匀速移动简谐力的作用

1922年,S.Timoshenko 研究了一个匀速移动的简谐力通过简支梁桥的情况。1928年,Inglis 又进一步研究了梁的动力响应。例如,载重汽车在桥头受到路面不平(跳车)的激励后,以车辆的固有频率发生振动而通过桥梁时,车辆簧上部分(即车身)的惯性力就是一种移动的简谐力。

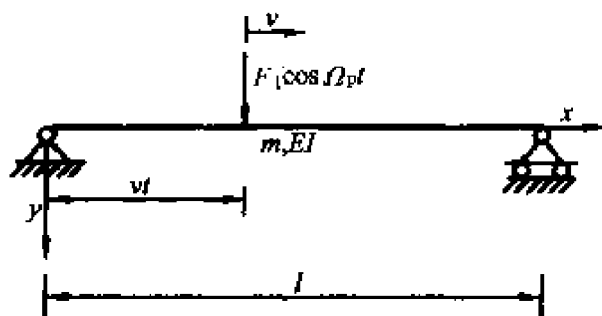


图 1-28 表示简谐力 $F_1 \cos \Omega_p t$ 以匀速 v 通过简支梁的情况。此时,振型函数为

$$\varphi(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

广义扰动力为

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{\int_0^l F_1 \cos \Omega_p t \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \frac{2 F_1 \cos \Omega_p t \sin \frac{n\pi vt}{l}}{ml} \end{aligned}$$

此时,无阻尼的各阶振型的解耦强迫振动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= \frac{2 F_1}{ml} \cos \Omega_p t \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ &= \frac{F_1}{ml} [\sin(\Omega_p + \Omega_n) t - \sin(\Omega_p - \Omega_n) t] \\ (n &= 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned}$$

(1-159)

式中, $\Omega_n = \frac{n\pi v}{l}$ 为与移动速度有关的各阶广义扰动频率; $\omega_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$; Ω_p 简谐力的扰动频率。

方程(1-159)的解可以通过将右边两个正弦函数的解相加而得到,即

$$y(x, t) = \frac{F_1}{ml} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{\omega_n^2 - (\Omega_p + \Omega_n)^2} [\sin(\Omega_p + \Omega_n)t - \frac{\Omega_p + \Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t] + \frac{1}{\omega_n^2 - (\Omega_p - \Omega_n)^2} [\sin(\Omega_p - \Omega_n)t - \frac{\Omega_p - \Omega_n}{\omega_n} \sin \omega_n t] \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1-160)$$

在实际情况中,除了移动的简谐力作用之外往往同时还有一个移动的常量力,如载重汽车的重力。此时,振动方程的全解可由式(1-150)和式(1-160)相加而成。

当仅考虑基本振型的共振条件时,由于 $\Omega_1 \ll \Omega_p$,共振将发生在 $\Omega_p = \omega_1$,并且最大动力响应将出现在简谐力离开桥跨的时刻,即 $t = l/v$,此时

$$\sin(\Omega_p + \Omega_1)t = \sin(\omega_1 \frac{l}{v} + \pi) = -\sin(\omega_1 \frac{l}{v})$$

$$\sin(\Omega_p - \Omega_1)t = \sin(\omega_1 \frac{l}{v} - \pi) = -\sin(\omega_1 \frac{l}{v})$$

代入式(1-160)后,即得

$$y(x, t = \frac{l}{v}) = \frac{F_1}{ml} \left[\frac{2 + \frac{\pi v}{\omega_1 l}}{2\omega_1(\frac{\pi v}{l}) + (\frac{\pi v}{l})^2} + \frac{2 - \frac{\pi v}{\omega_1 l}}{2\omega_1(\frac{\pi v}{l}) - (\frac{\pi v}{l})^2} \right] \sin \frac{\pi x}{l} \sin(\omega_1 \frac{l}{v}) \quad (1-161)$$

简化上式得

$$y(x, \frac{l}{v}) = \frac{2F_1}{\omega_1 m \pi v} \sin \frac{\pi x}{l} \sin(\omega_1 \frac{l}{v}) \quad (1-162)$$

跨中最大动挠度将发生在 $\sin(\omega_1 \frac{l}{v}) = 1$ 时, 注意到

$$y_{st}(\frac{l}{2}) \approx \frac{2F_1 l^3}{EI \pi^4} = \frac{2F_1}{m \omega_1^2 l}$$

即得

$$y_{dyn}(\frac{l}{2}) = \frac{2F_1}{\omega_1 m \pi v} = y_{st}(\frac{l}{2}) \frac{\omega_1 l}{\pi v} \quad (1-163)$$

此时, 动力放大因子为

$$\mu_d = \frac{y_{dyn}(\frac{l}{2})}{y_{st}(\frac{l}{2})} = \frac{\omega_1 l}{\pi v} = \frac{\omega_1}{\Omega_1} = 2 \frac{T_c}{T_1} \quad (1-164)$$

式中, $T_c = \frac{l}{v}$ 为简谐力通过全梁所需的时间。

可见, 对于匀速移动简谐力的情况, 共振发生在 $\omega_1 = \Omega_p$ 时, 动力放大因子将取决于移动的速度。速度愈慢, 通过全梁的时间愈长, 振动反应也愈大。这是因为简谐力输入的能量将与其锤击的次数 ($n = \frac{T_c}{T_1}$) 成正比。

如果梁桥存在着较大的阻尼, 则当简谐力移动到梁的右端时, 响应中的自由振动部分基本上已衰减。从式(1-160)中去掉 $\sin \omega_n t$ 有关的自由振动项后, 共振时的动挠度为

$$y(x, t = \frac{l}{v}) = \frac{F_1}{m l} \left[\frac{1}{2\omega_1(\frac{\pi v}{l}) + (\frac{\pi v}{l})^2} + \frac{1}{2\omega_1(\frac{\pi v}{l}) - (\frac{\pi v}{l})^2} \right] \sin \frac{\pi x}{l} \sin(\omega_1 \frac{l}{v})$$

$$= \frac{F_1}{ml} \frac{4\omega_1(\frac{\pi v}{l})}{[2\omega_1(\frac{\pi v}{l})]^2 - (\frac{\pi v}{l})^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin(\omega_1 \frac{l}{v}) \quad (1-165)$$

注意到 $\frac{\pi v}{l} = \Omega_1 \ll \omega_1$, 并令 $\sin(\omega_1 \frac{l}{v}) = 1$, 则最大跨中动挠度可近似地表示为

$$y_{\text{dyn}}(\frac{l}{2}) \approx \frac{F_1}{ml} \frac{4\omega_1(\frac{\pi v}{l})}{[2\omega_1(\frac{\pi v}{l})]^2} = \frac{F_1}{m\pi v \omega_1} \quad (1-166)$$

相当于式(1-163)的一半。这就是说, 强大的阻尼能使共振条件下的最大振幅减少一半。

对于一般有阻尼的情况, 强迫振动方程(1-159)的左边将增加一项阻尼力 $2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t)$ 。相应地, 方程的解同样可由右边的两部分荷载的解叠加而成。

如果忽略随时间衰减的自由振动部分, 强迫振动的稳态部分可写成

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{F_1}{ml} \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \\ &\left\{ \frac{[\omega_n^2 - (\Omega_p + \Omega_n)^2] \sin(\Omega_p + \Omega_n)t - 2\zeta_n(\Omega_p + \Omega_n)\omega_n \cos(\Omega_p + \Omega_n)t}{[\omega_n^2 - (\Omega_p + \Omega_n)^2]^2 - 4\zeta_n^2(\Omega_p + \Omega_n)^2\omega_n^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[\omega_n^2 - (\Omega_p - \Omega_n)^2] \sin(\Omega_p - \Omega_n)t - 2\zeta_n(\Omega_p - \Omega_n)\omega_n \cos(\Omega_p - \Omega_n)t}{[\omega_n^2 - (\Omega_p - \Omega_n)^2]^2 + 4\zeta_n^2(\Omega_p - \Omega_n)^2\omega_n^2} \right\} \\ &= \frac{F_1}{ml} \sum_{n=1}^N \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{1}{\omega_n^2} \left\{ \frac{\sin[(\Omega_p + \Omega_n)t + \theta_{n1}]}{\sqrt{[1 - (\Omega_p + \Omega_n)^2/\omega_n^2]^2 + 4\zeta_n^2(\Omega_p + \Omega_n)^2/\omega_n^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin[(\Omega_p - \Omega_n)t + \theta_{n2}]}{\sqrt{[1 - (\Omega_p - \Omega_n)^2/\omega_n^2]^2 + 4\zeta_n^2(\Omega_p - \Omega_n)^2/\omega_n^2}} \right\} \quad (1-167) \end{aligned}$$

式中, $\operatorname{tg} \theta_{n1} = - \frac{2\zeta_n(\Omega_p + \Omega_n)/\omega_n}{1 - (\Omega_p + \Omega_n)^2/\omega_n^2}$

$$\lg \theta_{n2} = -\frac{2\zeta_n(\Omega_p - \Omega_n)/\omega_n}{1 - (\Omega_p - \Omega_n)^2/\omega_n^2}$$

由于 $\Omega_1 \ll \Omega_p$, 仍利用 $\omega_1 = \Omega_p$ 的共振条件, 并取级数的第一项, 略去 Ω_1^2/ω_1^2 项后, 则

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{F_1}{ml} \sin \frac{\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin[(\omega_1 + \Omega_1)t + \theta_1]}{2\omega_1(\omega_1 + \Omega_1)\zeta_1} - \frac{\sin[(\omega_1 - \Omega_1)t + \theta_2]}{2\omega_1(\omega_1 - \Omega_1)\zeta_1} \right\} \\ &\approx \frac{F_1}{ml} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{1}{2\omega_1^2\zeta_1} \left\{ \sin[(\omega_1 + \Omega_1)t + \theta_1] - \sin[(\omega_1 - \Omega_1)t + \theta_2] \right\} \\ &= \frac{2F_1}{ml\omega_1^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \frac{1}{4\zeta_1} \left\{ \sin[(\omega_1 + \Omega_1)t + \theta_1] - \sin[(\omega_1 - \Omega_1)t + \theta_2] \right\} \end{aligned} \quad (1-168)$$

上式中, 可能取得最大振幅的是 $\sin[(\omega_1 + \Omega_1)t + \theta_1] = 1$ 和 $\sin[(\omega_1 - \Omega_1)t + \theta_2] = 0$, 因此

$$y_{\text{dyn}}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2F_1}{ml\omega_1^2} \cdot \frac{1}{4\zeta_1} \quad (1-169)$$

注意到

$$y_{\text{st}}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F_1 l^3}{48EI} \approx \frac{2F_1 l^3}{\pi^4 EI} = \frac{2F_1}{ml\omega_1^2}$$

得简支梁跨中最大振幅

$$y_{\text{dyn}}\left(\frac{l}{2}\right) = \mu_d y_{\text{st}}\left(\frac{l}{2}\right) \quad (1-170)$$

此时, 动力放大因子为

$$\mu_d = \frac{1}{4\zeta_1} \quad (1-171)$$

值得注意的是, 如果将简谐力 $F_1 \cos \Omega_p t$ 固定作用在简支梁的跨中, 当 $\Omega_p = \omega_1$ 时发生共振, 动力放大因子式(1-139)是大家熟知的 $\mu_d = \frac{1}{2\zeta_1}$ 。这说明, 在有阻尼的情况下移动的简谐力只有位置

固定的简谐力约一半的动力效应。

1.6.3 匀速滚动质量的作用

1937 年, Schallenkamp 第一次提出了考虑移动荷载本身质量的惯性力影响的简支梁桥的动力响应问题, 得出了比较精确的解答。

如果荷载质量与桥梁的质量相比很小, 前面所讨论的移动常量的解就是一个近似解。

图 1-29 表示滚动质量 M_v 在简支梁上匀速通过的情况。在任一时刻 t , 荷载对梁的作用力等于其重力减去质量的惯性力, 且认为滚动质量与梁密切相连, 具有相同的加速度。于是, 梁受到的作用力为

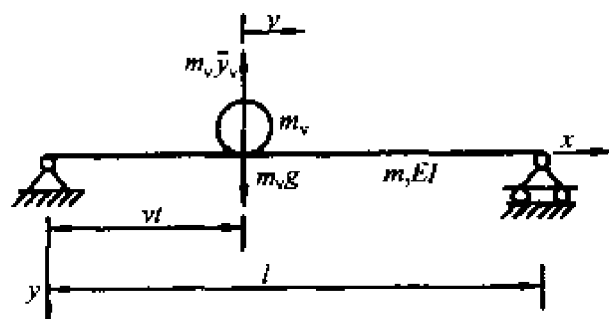


图 1-29 匀速滚动质量的作用模型

$$F(t) = M_v g - M_v \ddot{y}(x, t) \delta(x - vt) \quad (1-172)$$

令

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t)$$

则

$$\ddot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \ddot{q}_n(t)$$

代入式(1-172), 得

$$F(t) = M_v g - M_v \sum_{n=1}^N \varphi_n(vt) \ddot{q}_n(t) \quad (1-173)$$

已知简支梁的振型 $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, 于是得广义扰动力为

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{\int_0^l F(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \frac{2F(t) \varphi_n(vt)}{ml} \\ &= \frac{2M_v}{ml} \left[g - \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi vt}{l} \ddot{q}_i(t) \right] \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{aligned}$$

因此,无阻尼的各阶振型的强迫振动方程可写成

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= \frac{2M_v}{ml} \left[g - \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi vt}{l} \ddot{q}_i(t) \right] \\ &\quad \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned}$$

整理后,得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \left(\frac{2M_v}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \right) \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} + \omega_n^2 q_n(t) \\ = \frac{2M_v g}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (1-174)$$

上式为变系数的二阶微分方程组,只能借助于电子计算机采用数值方法求解。

如果仅考虑梁的一阶振型,并令 $y_c = q_1$, 其中设 y_c 为梁的跨中动挠度,则上式简化为

$$\ddot{y}_c \left(1 + \frac{2M_v}{ml} \sin^2 \frac{\pi vt}{l} \right) + \omega_1^2 y_c = \frac{2M_v g}{ml} \sin \frac{\pi vt}{l} \quad (1-175)$$

这个式子同样属于变系数微分方程,仍然需要用数值解法,它左边括号中的第二项就是移动质量的效应。如令 $M_v = 0$, $M_v g = F$, 即为匀速移动常量力的强迫振动方程式。

1.6.4 匀速移动弹簧—质量的作用

1954年, Biggs 在 Inglis 所发展的理论基础上研究了更为接近实际的车辆模型, 即讨论了一个匀速移动的弹簧—质量对简支梁桥的作用, 如图 1-30 所示, 并得到了便于计算的近似解。近似处理时引入以下几点假定:

1. 只考虑简支梁桥的第一阶振型。这样, 桥梁模型就简化为一个单自由度体系, 如图 1-30b 所示。

2. 车辆模型也处理成单自由度体系, 如图 1-30c 所示。其中车辆的质量分为两部分组成, 一个由刚度为 K_v 的弹簧支承着的跳动质量 M_{vs} , 即汽车车体质量, 另一个假定与梁始终保持密切接触的不跳动质量 M_{vu} , 即汽车轮轴部分的质量。

3. 桥梁和车辆都假定具有粘性阻尼。

由于 M_{vs} 具有独立的振动自由度 z , 因此, 弹簧—质量对梁的作用力可写成

$$F(t) = M_{vu}[g - \ddot{y}(x, t)\delta(x - vt)] + k_v[z - y(x, t)\delta(x - vt)] + M_{vs}g \quad (1-176)$$

式中, Z 为质量 M_{vs} 的绝对位移, 由静平衡位置算起; k_v 为车辆悬挂弹簧的刚度; g 为重力加速度。

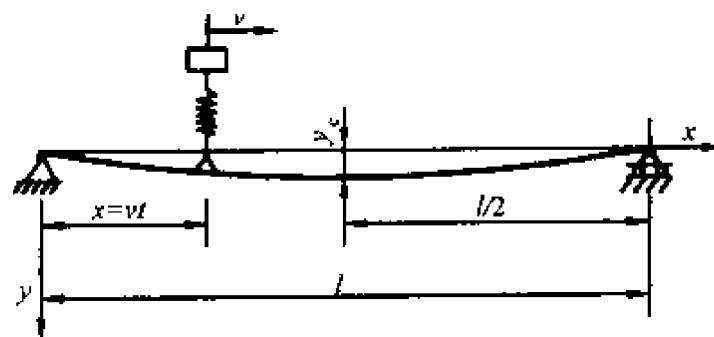
式(1-176)中第一项与前面式(1-172)相同, 大多数情况下由于汽车轮轴等重量与车体相比较小, 因此, M_{vu} 项的影响很小; 其余项是汽车车体的质量项, 也是极其重要的一项。同样, 令

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t)$$

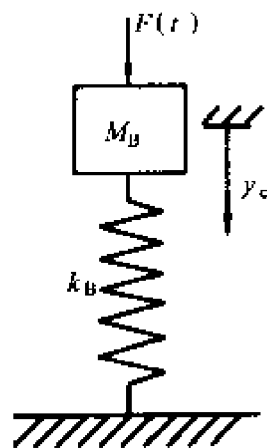
则

$$\ddot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \ddot{q}_n(t)$$

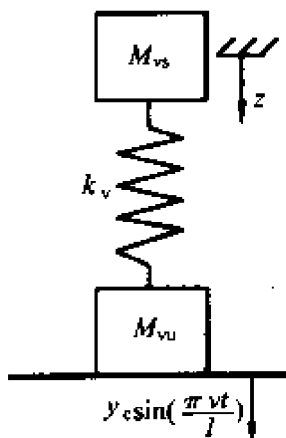
代入式(1-176), 并引入简支梁的振型 $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, 得



a)



b)



c)

图 1-30 匀速移动弹簧—质量的作用模型

$$F(t) = M_{vu} \left[g - \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \sin \frac{n\pi vt}{l} \right] + k_v \left[z(t) - \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin \frac{n\pi vt}{l} \right] + M_{vs} g$$

于是,相应的广义扰动力为

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{\int_0^l F(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx} \\ &= \left\{ \frac{2M_{vu}}{ml} \left[g - \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \right] + \frac{2k_v}{ml} \right. \\ &\quad \left. \left[z(t) - \sum_{i=1}^N q_i(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \right] + \frac{2M_{vs}g}{ml} \right\} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{aligned}$$

此时,无阻尼的桥梁各阶振型的强迫振动方程为

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_n(t) + \frac{2M_{vu}}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sum_{i=1}^N \ddot{q}_i(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} + \omega_n^2 q_n(t) \\ &= \left\{ \frac{2(M_{vs} + M_{vu})}{ml} g + \frac{2k_v}{ml} \left[z(t) - \sum_{i=1}^N q_i(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \right] \right\} \\ & \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (1-177)$$

从上式可见,对应于每一个振型有一个方程,共有 N 个方程,而且是相互耦合的。但是,对于附加的自由度 z 还需要一个附加方程,即簧上质量的动力平衡方程

$$M_{vs} \ddot{z}(t) + k_v \left[Z(t) - \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin \frac{n\pi vt}{l} \right] = 0 \quad (1-178)$$

式(1-177)和式(1-178)共提供了 $N+1$ 个方程,可用数值方法求解。

如果只考虑一阶振型,令 $y_c = q_1$, 设为跨中动挠度,并计入梁和车辆荷载的粘性阻尼力项,则上面的方程组简化为

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{ml}{2} + M_{vu} \sin^2 \frac{\pi vt}{l} \right) \ddot{y}_c(t) + \frac{ml}{2} \omega_1^2 y_c(t) + c_B \dot{y}_c(t) \\ &= \left[(M_{vs} + M_{vu}) g + k_v (z - y_c \sin \frac{\pi vt}{l}) \right] \sin \frac{\pi vt}{l} \\ & M_{vs} \ddot{Z}(t) + K_v \left[Z(t) - y_c(t) \sin \frac{\pi vt}{l} \right] \\ &+ c_v \left[\dot{z}(t) - \dot{y}_c(t) \sin \frac{\pi vt}{l} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-179)$$

式中, c_B 和 c_v 分别为桥梁和车辆体系的阻尼系数。此联立方程组相当于图 1-30 所示的两个单自由度体系相耦合的一个等效振动体系,可用数值方法求解。

引入符号

$$\Delta = z - y_c \sin \frac{\pi vt}{l}, \text{ 为簧上质量 } M_{vs} \text{ 相对于桥梁的位移;}$$

$M_v = M_{vs} + M_{vu}$, 为汽车车体全部质量;

$M_B = \frac{1}{2} ml + M_{vu} \sin^2 \frac{\pi vt}{l}$, 为梁的等效质量;

$k_B = \frac{ml}{2} \omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} \approx \frac{48EI}{l^3}$, 为梁的跨中位移刚度。

式(1-179)可简写为

$$\left. \begin{aligned} M_B \ddot{y}_c + c_B \dot{y}_c + k_B y_c &= (M_v g + k_v \Delta) \sin \frac{\pi vt}{l} \\ M_{vs} \ddot{z} + c_v \dot{\Delta} + k_v \Delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-180)$$

如已知车辆簧上质量 M_{vs} 在 $t=0$ 时的初始值 Δ_0 、 $\dot{\Delta}_0$ 和 $\ddot{z}_0$, 即可算出振动位移 z 和 y_c 的时间历程。

Biggs 于 50 年代按上述理论用计算机模拟分析了一辆双轴 10t 载重汽车通过一座跨径为 86 英尺 (26.2m) 的简支组合梁桥时的振动历程, 并和实际的现场试验作了对比, 如图 1-31 所示。在分析中, Biggs 作了以下几点处理:

1. 将双轴汽车简化为一个单自由度体系, 车辆的弹簧常数和阻尼系数都采用了实测值。由于车辆的前后轴距不足桥梁跨径的 $1/5$, 故这一简化的误差不大;

2. 仅考虑桥梁的第一阶振型;

3. 实测了车辆进入桥跨时簧上质量的竖向位移和速度, 并以此作为理论分析的初始条件。

图 1-31 表示车速为 37ft/s (11.3m/s) 时的理论和实测结果的对比。两者之间良好的一致性说明了近似理论基本上反映了车辆振动的机制。

Biggs 还利用所建立的近似理论对一些重要参数的变化所带来的影响进行了讨论。

引入桥梁和车辆的固有频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_B^2 &= \frac{k_B}{M_B} = \frac{M_v g}{M_B y_{st}} \\ \omega_v^2 &= \frac{k_v}{M_{vs}} \end{aligned} \right\} \quad (1-181)$$

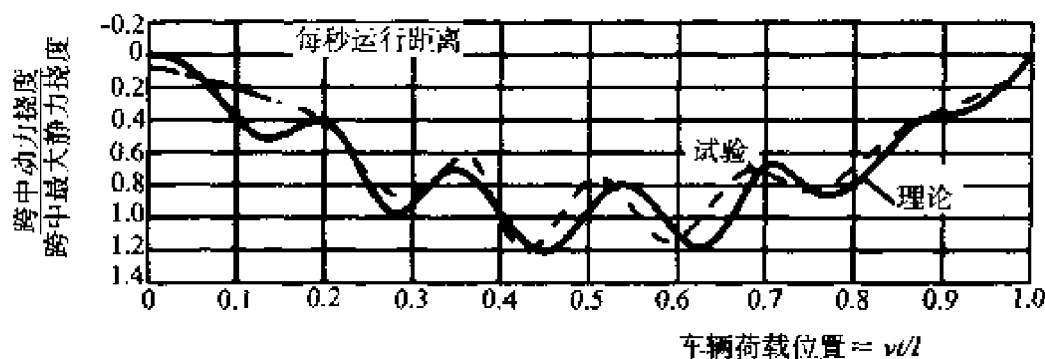


图 1-31 跨中动挠度的理论与试验值比较曲线

式中, y_{st} 为车辆的重力 $M_v g$ 作用在简支梁跨中产生的跨中静挠度。

忽略阻尼力项, 式(1-180)可改写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{y}_c}{y_{st}} &= \omega_B^2 \left(\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{y_c}{y_{st}} \right) + \omega_v^2 \frac{M_{vs}}{M_B} \left(\frac{z}{y_{st}} - \frac{y_c}{y_{st}} \sin \frac{\pi vt}{l} \right) \sin \frac{\pi vt}{l} \\ \frac{\ddot{z}}{y_{st}} &= -\omega_v^2 \left(\frac{z}{y_{st}} - \frac{y_c}{y_{st}} \sin \frac{\pi vt}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-182)$$

设桥梁的初始条件为

$$\ddot{y}_{c0} = \dot{y}_{c0} = 0$$

车辆的初始条件为

$$\begin{aligned} z_0 &= z_{m0} \sin \theta \\ \dot{z}_0 &= z_{m0} \omega_v \cos \theta \end{aligned}$$

式中, z_{m0} 为车辆初始振动的幅值; θ 为相位角。

取无量纲比值

$$\alpha = \left(\frac{\omega_v}{\omega_B} \right)^2 \frac{M_v}{M_B} \frac{z_{m0}}{y_{st}} = \frac{z_{m0} \omega_v^2}{g} \quad (1-183)$$

使上述参数按下列变化范围进行组合, 用计算机模拟分析的结果列于图 1-32 中。

$$\left. \begin{aligned} 0.1 &\leq \alpha \leq 0.6 \\ 0.05 &\leq \frac{M_v}{M_B} \leq 0.5 \\ 0.67 &\leq \frac{\omega_B}{\omega_v} \leq 8.0 \end{aligned} \right\}$$

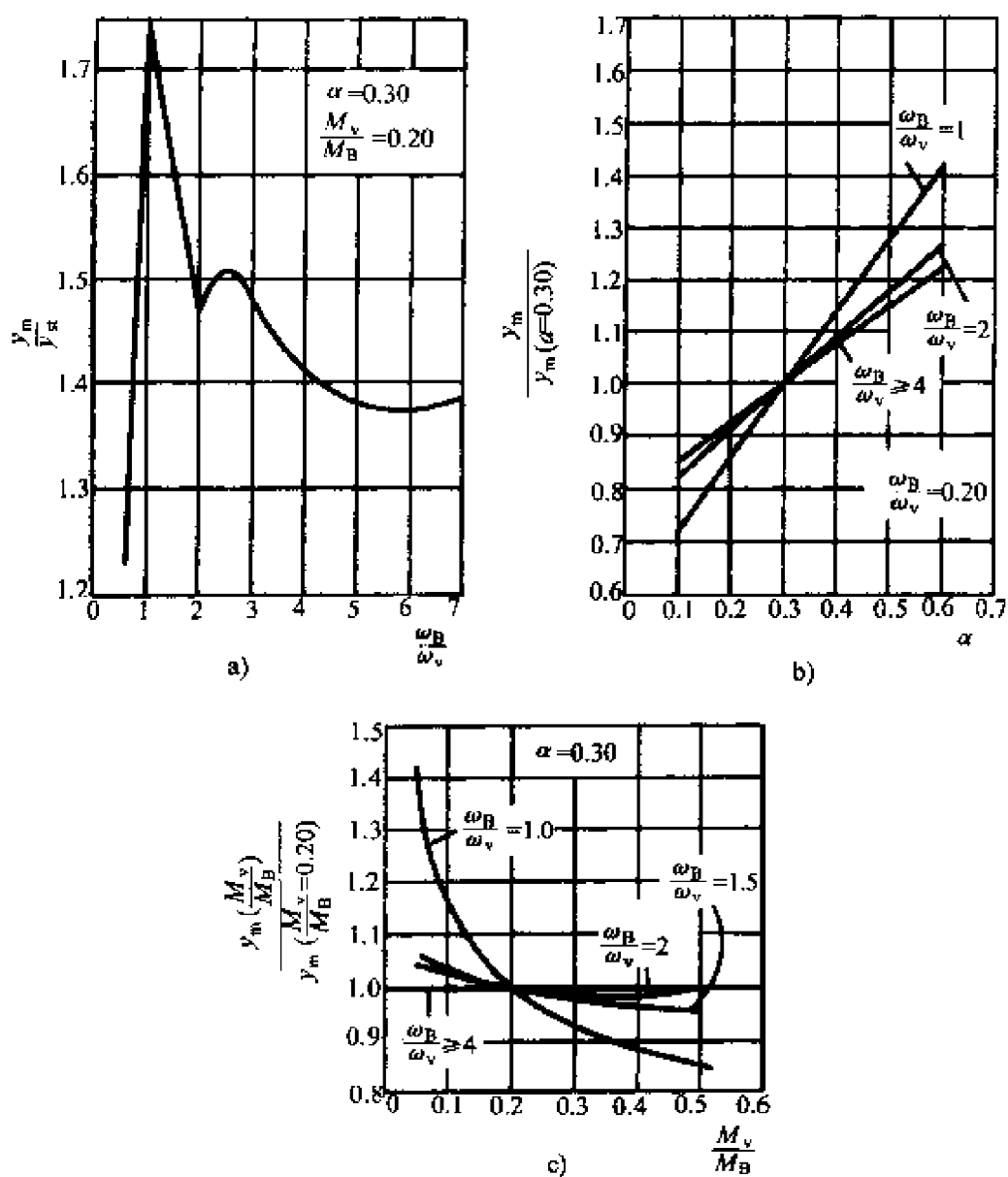


图 1-32 最大动挠度与参数的关系

从图中可以看出下面的规律：

1. α 的影响。 y_m/y_{st} 随 α 的变化呈线性关系。这说明车辆的

初始振幅(即由于引道不平整或伸缩缝的损坏引起桥头跳车)是重要原因。

2. ω_B/ω_v 的影响。当 $\omega_B/\omega_v = 1$ 时, $\gamma_{\text{dyn}}/\gamma_{\text{st}}$ 将达到最大值。这就说明车辆振动作为一种强迫振动存在着共振现象。然而,应当指出的是,即使不存在阻尼,这种共振并不会导致振幅的无限增大,因为桥梁振动能量的积聚受到车辆在桥上有限通过时间的限制。

3. M_v/M_B 的影响。对于较高的频率比 ω_B/ω_v , 质量比 M_v/M_B 的变化对动力放大因子 $\gamma_{\text{dyn}}/\gamma_{\text{st}}$ 没有什么影响。但在共振条件下,即 $\omega_B/\omega_v = 1$ 时,质量比将有明显的影响。应当指出, γ_{st} 与 M_v 有直接关系,当 M_v/M_B 增大时,即使 $\gamma_{\text{dyn}}/\gamma_{\text{st}}$ 减小,桥梁的总振动位移将会增大。

1.6.5 匀速移动双轴汽车荷载的作用

目前,公路桥梁大多数采用的是钢筋混凝土或预应力混凝土结构。在一般情况下,由于汽车自重比桥梁自重小很多,而且同时过桥的车辆不会很多(有时只是一、二辆),可以把实际的梁桥作为受动力作用的弹性梁来考虑。汽车荷载对梁作用的动力效应随时间改变,其作用点也在改变。双轴汽车的前后轴距大约在 4 米左右,故在中小跨径梁桥上运动的汽车,其前后轴距对梁桥的动力响应影响是不可忽视的。

汽车结构一般是一个复杂的空间多自由度系统。为了便于分析汽车对梁桥产生的竖向弯曲强迫振动,可以忽略汽车各零部件的局部振动,仅研究汽车车体和前后桥的竖向振动,把车体假设为刚体,联结并支承于汽车的悬挂弹簧和轮胎上,如图 1-33a 所示。考虑到车体的左右摇摆对梁桥的竖向振动影响较小,前后桥的质量比车体的质量小得多,故将双轴汽车振动模型简化成如图 1-33c 所示的平面两自由度振动体系,即支承于前后悬挂弹簧上的刚体作上下垂直振动和绕刚体的质心轴作前后俯仰振动,如图 1-33d。

一般情况下,汽车结构设计应符合偏频设计条件,即希望其中

一个车轴上的轮子在行驶时受到跳动不会传到另一个车轴上,构造上必须保证车体的质量分布和前后轴的位置之间应满足 $\epsilon = \frac{\rho_c^2}{l_1 l_2} = 1$ 的条件。可以证明,此时汽车车体的无阻尼振动可分解为两个独立的弹簧—质量振动体系,如图 1-34 所示。图中的质量分配如下

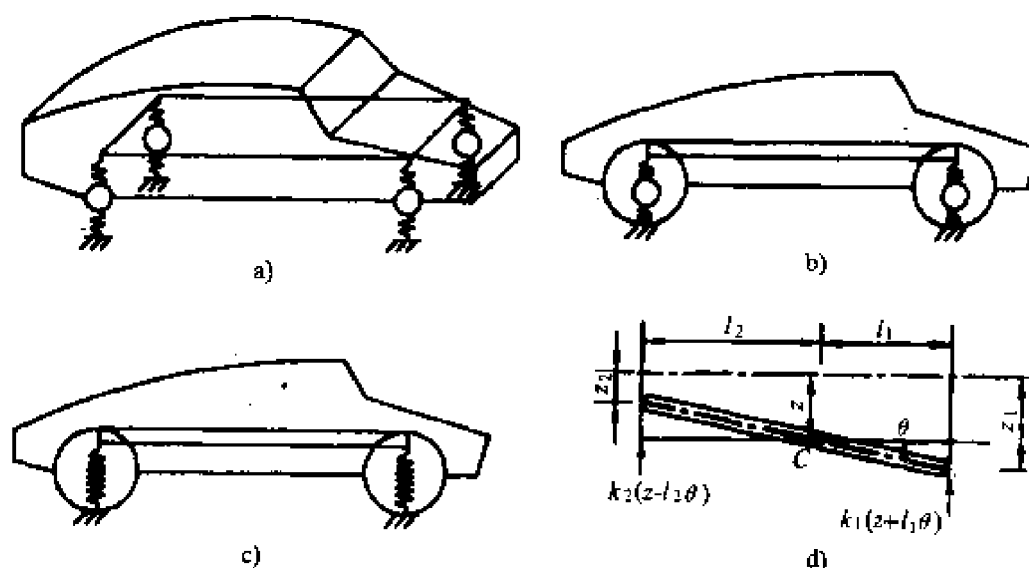


图 1-33 双轴汽车简化模型

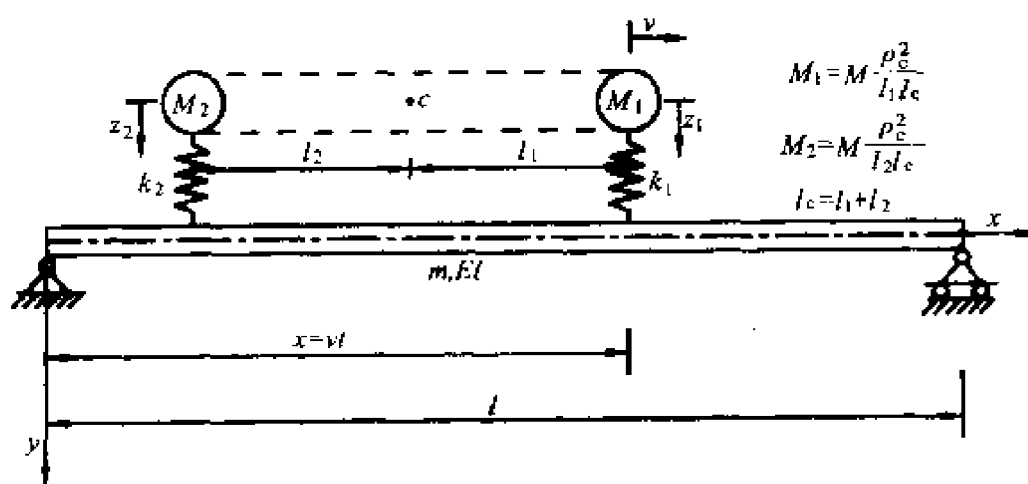


图 1-34 匀速移动的双轴汽车的作用模型

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M \frac{\rho_c^2}{l_1 l_c} \\ M_2 &= M \frac{\rho_c^2}{l_2 l_c} \end{aligned} \right\} \quad (1-184)$$

式中, M 为汽车车体(包括载重物)的质量;

ρ_c 为 M 绕过重心 C 点水平横桥轴的回转半径, 即 $\rho_c^2 = \frac{J_p}{M}$, J_p 为转动惯量;

l_c 为汽车的前后轴距, $l_c = l_1 + l_2$;

l_1 、 l_2 分别为汽车重心 C 至前、后轴的距离。

大多数汽车的实际 $\epsilon = 0.8 \sim 1.2$, 接近于 1。因此, 上述分解汽车质量的方法是可行的, 不会带来很大的误差。

车辆对梁桥的作用力可表示为

$$F_1(t) = M_1 g + k_1 [z_1(t) - y(x, t) \delta(x - vt)]$$

$$F_2(t) = M_2 g + k_2 [z_2(t) - y(x, t) \delta(x - vt + l_c)]$$

式中, z_1 、 z_2 分别为汽车前、后桥弹簧上质量 M_1 、 M_2 的绝对位移, 由静平静位置算起。

$$\text{令 } y(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t)$$

同时已知简支梁的振型函数为

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

得

$$F_1(t) = M_1 g + k_1 [z_1(t) - \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin \frac{n\pi vt}{l}]$$

$$F_2(t) = M_2 g + k_2 [z_2(t) - \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l c}{l})]$$

相地的广义扰动力为

当 $0 \leq t \leq \frac{l_c}{v}$ 时

$$Q_{n1}(t) = \frac{\int_0^l F_1(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \frac{2M_1 g}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} + \frac{2k_1}{ml} \left(Z_1 - \sum_{i=1}^N q_i \sin \frac{i\pi vt}{l} \right) \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

当 $\frac{l_c}{v} < t \leq \frac{l}{v}$ 时

$$Q_{n2}(t) = \frac{\left[\int_0^l F_1(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx + \int_0^l F_2(t) \delta(x - vt + l_c) \varphi_n(x) dx \right]}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \frac{2M_1 g}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} + \frac{2k_1}{ml} \left[z_1 - \sum_{i=1}^N q_i \sin \frac{i\pi vt}{l} \right] \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

$$+ \frac{2M_2 g}{ml} \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right) + \frac{2k_2}{ml}$$

$$\left[z_2 - \sum_{i=1}^N q_i \sin \left(\frac{i\pi vt}{l} - \frac{i\pi l_c}{l} \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right)$$

当 $\frac{l}{v} < t \leq \frac{l+l_c}{v}$ 时

$$Q_{n3}(t) = \frac{\int_0^l F_2(t) \delta(x - vt + l_c) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \frac{2M_2 g}{ml} \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right) + \frac{2k_2}{ml}$$

$$\left[z_2 - \sum_{i=1}^N q_i \sin\left(\frac{i\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l}\right)$$

于是,无阻尼的梁桥各阶振型的强迫振动方程可写成

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \begin{cases} Q_{n1}(t), & 0 \leq t \leq \frac{l_c}{v} \\ Q_{n2}(t), & \frac{l_c}{v} < t \leq \frac{l}{v} \\ Q_{n3}(t), & \frac{l}{v} < t \leq \frac{l+l_c}{v} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-185)$$

上式中共有 $3N$ 个方程,分别对应着 N 个振型,每个时段有 N 个方程。对于附加的两个自由度 z_1 和 z_2 ,还需要两个附加方程,即

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + \Omega_1^2 \left(z_1 - \sum_{n=1}^N q_n \sin \frac{n\pi vt}{l} \right) &= 0 \\ \ddot{z}_2 + \Omega_2^2 \left[z_2 - \sum_{n=1}^N q_n \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-186)$$

式中, $\Omega_1^2 = k_1/M_1$ 为前悬挂系统的固有频率; $\Omega_2^2 = k_2/M_2$ 为后悬挂系统的固有频率。式(1-185)中的第一时段方程和式(1-186)中的第一方程联立为 $N+1$ 个方程;式(1-185)中的第二时段方程和式(1-186)两个方程联立为 $N+2$ 个方程;式(1-185)中的第三时段方程和式(1-186)的第二个方程联立为 $N+1$ 个方程,分别用数值方法求解。这里应该指出的是,各时段的交接点处,待求的方程解应该连续。

如果只考虑一阶振型,令 $y_c = q_1$,即简支梁的跨中动挠度,并记入梁的阻尼力项,则式(1-185)可简化为三自由度的变系数偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_c(t) + 2\zeta_1\omega_1\dot{y}_c(t) + \omega_1^2 y_c(t) &= \begin{cases} Q_{11}(t), & 0 \leq t \leq \frac{l_c}{v} \\ Q_{12}(t), & \frac{l_c}{v} < t \leq \frac{l}{v} \\ Q_{13}(t), & \frac{l}{v} < t \leq \frac{l+l_v}{v} \end{cases} \\ \ddot{z}_1(t) + \Omega_1^2[z_1(t) - y_c(t)\sin\frac{\pi vt}{l}] &= 0 \\ \ddot{z}_2(t) + \Omega_2^2[z_2(t) - y_c(t)\sin\frac{\pi vt}{l}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-187)$$

上式中,由于 $Q_{1i}(t)$ ($i=1,2,3$) 中含有 $y_c(t)$ 和 $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$, 因此,式(1-187)还可以进一步写成类似式(1-180)的形式。如果当 l_c/l 很小时,上式就可以退化为式(1-179)的形式,只是令 $M_{vi}=0$ 且不计阻尼罢了。

下面讨论一种简化计算方法。

由于梁的抗弯刚度一般远远大于汽车悬挂弹簧的刚度,梁产生的挠度远比弹簧上质量产生的绝对位移小得多,同时忽略汽车悬挂体系的阻尼,则式(1-186)变成

$$\ddot{z}_i(t) + \Omega_i^2 z_i(t) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1-188)$$

汽车以匀速 v 上桥的瞬时,车体的竖向位移 z_{oi} 或速度 $\dot{z}_{oi}$ 或加速度 $\ddot{z}_{oi}$ 中的两个同时可测得。因此,初始条件已知的方程式(1-188)的解为

$$z_i(t) = A_i \cos(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (i=1,2) \quad (1-189)$$

式中, A_i 为初始条件确定的振幅, α_i 为初始条件确定的相位。于是,汽车对梁的作用力则为

$$F_1(t) = M_1 g + k_1 z_1(t) = M_1 g + k_1 A_1 \cos(\Omega_1 t + \alpha_1)$$

$$F_2(t) = M_2 g + k_2 z_2(t) = M_2 g + k_2 A_2 \cos(\Omega_2 t + \alpha_2)$$

因此,对简支梁的各阶振型,可得广义扰动力为

$$\text{当 } 0 \leq t \leq \frac{l_c}{v} \text{ 时}$$

$$Q_{n1}^*(t) = \frac{\int_0^l F_1(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \left[\frac{2M_1 g}{ml} + \frac{2k_1 A_1}{ml} \cos(\Omega_1 t + \alpha_1) \right] \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

当 $\frac{l_c}{v} \leq t \leq \frac{l}{v}$ 时

$$Q_{n2}^*(t) = \frac{\int_0^l F_1(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx + \int_0^l F_2(t) \delta(x - vt + l_c) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \left[\frac{2M_1 g}{ml} + \frac{2k_1 A_1}{ml} \cos(\Omega_1 t + \alpha_1) \right] \sin \frac{n\pi vt}{l}$$

$$+ \left[\frac{2M_2 g}{ml} + \frac{2K_2 A_2}{ml} \cos(\Omega_2 t + \alpha_2) \right] \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right)$$

当 $\frac{l}{v} < t \leq \frac{l + l_c}{v}$ 时

$$Q_{n3}^*(t) = \frac{\int_0^l F_2(t) \delta(x - vt + l_c) \varphi_n(x) dx}{\int_0^l m \varphi_n^2(x) dx}$$

$$= \left[\frac{2M_2 g}{ml} + \frac{2K_2 A_2}{ml} \cos(\Omega_2 t + \alpha_2) \right] \sin \left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi l_c}{l} \right)$$

于是,无阻尼梁的各阶振型的强迫振动方程为

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \begin{cases} Q_{n1}^*(t), & 0 \leq t \leq \frac{l_c}{v} \\ Q_{n2}^*(t), & \frac{l_c}{v} < t \leq \frac{l}{v} \\ Q_{n3}^*(t), & \frac{l}{v} < t \leq \frac{l + l_c}{v} \end{cases} \quad (1-190)$$

上式中有 N 个方程对应着 N 个振型,应用振型分析法可直接求解上述常系数线性微分方程组。显然式(1-190)较式(1-185)简单得

多,可以写出其解析式。

对于多辆双轴汽车匀速过桥的情况,可应用叠加法求解梁的动力响应,但应注意过桥汽车的车轴悬挂体系所处的时间区段。对任一车轴悬挂弹簧—质量体系可写出方程

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = \left[\frac{2M_i g}{ml} + \frac{2k_i A_i}{ml} \cos(\Omega_i t + \alpha_i) \right] \sin \frac{n\pi}{l}(vt - a_i) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-191)$$

式中, a_i 表示各车轴与参考轴之间的轴距, i 指同时作用在桥上的任一车轴。利用三角函数变换关系,有

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = & \frac{2M_i g}{ml} \sin\left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi a_i}{l}\right) \\ & + \frac{k_i A_i}{ml} \left[\sin\left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi a_i}{l} - \Omega_i t - \alpha_i\right) \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi a_i}{l} + \Omega_i t + \alpha_i\right) \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (1-192)$$

引入符号 $\Omega_v = \frac{n\pi v}{l}$, $\alpha_{ai} = \frac{n\pi a_i}{l}$, 上式的稳态解可写为

$$\begin{aligned} q_n(t) = & \frac{2M_i g}{ml} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\sin(\Omega_v t - \alpha_{ai} + \theta_1)}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega_v^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\Omega_v^2}{\omega_n^2}}} \\ & + \frac{k_i A_i}{ml} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\sin[(\Omega_v - \Omega_i)t - (\alpha_{ai} + \alpha_i) + \theta_{2i}]}{\sqrt{[1 - (\frac{\Omega_v - \Omega_i}{\omega_n})^2]^2 + 4\zeta_n^2 (\frac{\Omega_v - \Omega_i}{\omega_n})^2}} \\ & + \frac{k_i A_i}{ml} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\sin[(\Omega_v + \Omega_i)t - (\alpha_{ai} - \alpha_i) + \theta_{3i}]}{\sqrt{[1 - (\frac{\Omega_v + \Omega_i}{\omega_n})^2]^2 + 4\zeta_n^2 (\frac{\Omega_v + \Omega_i}{\omega_n})^2}} \end{aligned} \quad (1-193)$$

式中,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{2\zeta_n \Omega_v / \omega_n}{1 - \Omega_v^2 / \omega_n^2} \\ \operatorname{tg} \theta_{2i} &= \frac{2\zeta_n \frac{\Omega_v - \Omega_i}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega_v - \Omega_i}{\omega_n}\right)^2} \\ \operatorname{tg} \theta_{3i} &= \frac{2\zeta_n \frac{\Omega_v + \Omega_i}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega_v + \Omega_i}{\omega_n}\right)^2}\end{aligned}$$

对于参考轴的运动作用,可令 $a_i = 0$,亦即 $a_{a_i} = 0$,代入式(1-193)求解即可。第 i 轴的运动作用,是在 $t \geq a_i/v$ 时且该轴仍在该跨梁桥上产生的,因此仍然用式(1-193)计算各个时段车轴的运动作用对梁的响应的贡献,叠加后即得多辆双轴汽车联合作用下梁的动力响应。

从上述分析可以看出,移动车辆荷载作用下,即使是简支梁桥,所建立的各阶振型的强迫振动方程往往是变系数的微分方程,必须借助于计算机才能完成数值计算。在目前的机算机普及时代,解决这类问题已不再有计算手段方面的困难。同时也可看出,移动车辆荷载作用下梁的强迫振动方程的建立和求解与确定位置激励力作用下梁的强迫振动方程的建立和求解是有区别的。移动荷载作用下的强迫振动方程的系数往往与时间有关,只能用数值方法分析。确定位置激励力作用下的强迫振动方程的是常系数的,其响应是可以直接写出的。

1.7 梁桥的弹塑性动力分析

对于具有分布质量和分布荷载的梁桥,求解非弹性反应是非常困难的。一种可能的途径是将通常的弹性分析应用于梁上某点达到极限弯曲能力的时候,假定在该点形成了一个理想铰,于是构成了一个新的弹性体系。这样分析可继续进行,直至形成第二个

铰或第一个铰出现弹性工作性能得到恢复的反方向转动时为止。这种分析是非常冗繁的,因为在反应过程中体系要改变几次,而且仍然不是精确的,因为塑性工作性能实际上并不集中在所假定的一个点上。这种途径是很不实用的。

另一种途径是将梁桥简化成图 1-35 所示的集中质量参数体系。质量和荷载都被看成是作用在沿跨长的各集中质量点上,并且假设塑性铰也只出现在这些点上。在弹性范围内,可按通常的方法运用各点处的单位挠度来确定刚度系数。当在某点上形成塑性铰时,可以对在该点有铰的梁计算一组新的刚度系数。虽然它比上述第一种方法要实际些,但由于可能铰排列的数目很多,这一途径仍然是冗繁的。但是,采用有限差分法能够使其得到简化。下面介绍用这种方法求解梁非弹性响应的过程。

假设一均质等截面简支梁承受均布荷载 $p(t)$ 的作用。将梁等分成 N 段,相应参数为

$$\overline{M} = m\Delta x$$

$$F(t) = p(t)\Delta x$$

式中, $\Delta x = l/N$ 为等分段长度, m 为梁单位长度的匀布质量。

r 点处的曲率可近似地用二阶中心差分表示为

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_r = \left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)_r \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(\gamma_{r+1} - 2\gamma_r + \gamma_{r-1}) \quad (1-194)$$

式中, γ_r 是 r 点的挠度。于是, r 点处梁的弯矩为

$$\begin{aligned} M_r &= -EI\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)_r \\ &\approx -\frac{EI}{(\Delta x)^2}(\gamma_{r+1} - 2\gamma_r + \gamma_{r-1}) \end{aligned} \quad (1-195)$$

假如现在考虑图 1-35c 所示梁的一个微段(假设是无质量的)的平衡,该微段的剪力显然为

$$V_{r-1,r} = \frac{M_r - M_{r-1}}{\Delta x}$$

其次再考虑图 1-35d 所示质量 $\overline{M}_r$ 的动力平衡,其平衡方程为

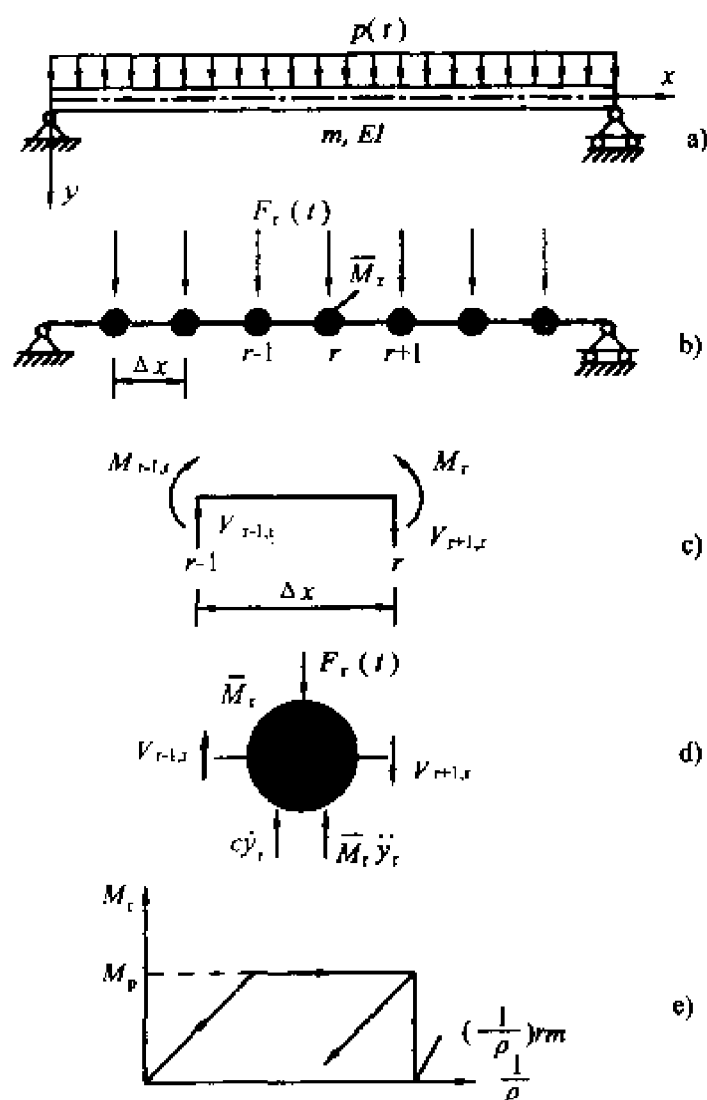


图 1-35 弹塑性梁分析的有限差分公式

$$\overline{M}_r \ddot{y}_r + V_{r-1,t} - V_{r+1,t} + c\dot{y}_r = F_r(t)$$

或

$$\overline{M}_r \ddot{y}_r - \frac{M_{r-1} - 2M_r + M_{r+1}}{\Delta x} + c\dot{y}_r = F_r(t)$$

$$(\tau = 1, 2, 3, \dots, N-1) \quad (1-196)$$

式中, c 是粘性阻尼系数。

在任意时刻, 对于给定的体系的变形, 可用式(1-195)求解所有各点的弯矩, 并由式(1-196)可以计算这些点处的加速度。这

样,对于多自由度集中质量体系,就可用通常的方法来完成数值分析。

当其中一处的弯矩达到极限弯曲能力 M_p 时,在以后的计算中,这些弯矩值就保持为该常量值。但是,必须继续进行式(1-195)的计算,直至达到一个峰值 $M_{rm}^p = -(\frac{1}{\rho})_{rm} EI$ 和假设的 M_r 开始减小为止。弯矩的逆转说明此点已恢复到弹性工作状态,从而弯矩就可用图 1-35e 所示理想化的弯矩—曲率关系计算而得。假设此时对应的曲率处在回弹阶段,则

$$\begin{aligned} M_r &= M_p - [(\frac{1}{\rho})_{rm} - (\frac{1}{\rho})_r](-EI) \\ &= M_p + (\frac{1}{\rho})_r(-EI) - (\frac{1}{\rho})_{rm}(-EI) \quad (1-197) \\ &\approx M_p - \frac{EI}{(\Delta x)^2}(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}) - M_{rm}^p \end{aligned}$$

式中, M_{rm}^p 为 r 点处计算的假设弯矩峰值。

上述方程很容易修正,使它们适用于质量、刚度和荷载均为非均匀分布的梁桥。

为了使上述的集中质量参数模型能得到满意的精度,必须采用相当多数目的质量点。这种数目视荷载型式而定,但在一般情况下需要将单跨梁等分成 10 段。因此,集中质量体系将有 9 个自由度,并且对于数值分析的时段必须取为弹性体系最小自振周期的一部分。显然,这种分析必须借助于电算。

1.8 钢筋混凝土梁的动刚度分析模型

众所周知,钢筋混凝土梁的刚度 EI 是随着外荷载作用的大小而变化的,同时又因截面位置不同而不同。即使对梁作静力分析,也颇感棘手。我国公路桥梁现行规范中为了简化计算,规定了钢筋混凝土静定梁的抗弯刚度取 $0.85 E_h I_{01}$,超静定梁的抗弯刚度取 $0.67 E_h I_h$,其中, I_{01} 为钢筋混凝土开裂截面的换算惯性矩, I_h 为

钢筋混凝土毛截面的惯性矩。用结构力学的方法计算钢筋混凝土梁在车辆荷载作用下的静挠度。

对钢筋混凝土梁进行动力分析时,必须知道其动刚度 EI_d 。在动力作用下,动刚度 EI_d 受到更多更复杂的因素影响,其值与梁在静力作用下的静刚度 EI_s 明显不同。对于这方面的研究,国内外学者做了大量的工作,在动刚度与静刚度关系方面获得了很多成果。本节主要介绍两种动力试验模型,并重点分析弹性加载试验模型的基本原理。

1.8.1 直接加载模型

如图 1-36 所示,在钢筋混凝土梁上直接对称加挂质量 M ,同时固定于悬挂装置上。该体系的无阻尼固有振动方程为

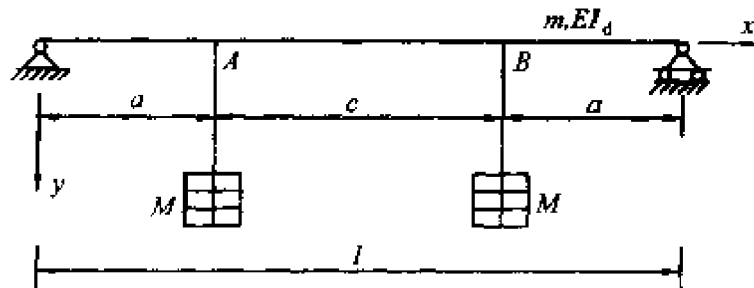


图 1-36 直接加载试验模型

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(x, t) + EI_d \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} \\ = - M\ddot{y}(x, t)\delta(x - a) - M\ddot{y}(x, t)\delta(x - b) \quad (1-198) \end{aligned}$$

式中, $\delta(x - a)$ 、 $\delta(x - b)$ 为狄拉克函数, $b = a + c$ 。

设简支梁的振动挠曲位移

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) q_n(t)$$

和振型函数

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

利用振型的正交性,式(1-198)可写成

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = & -\frac{2M}{ml} \sin \frac{n\pi a}{l} \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi a}{l} \ddot{q}_i(t) \\ & - \frac{2M}{ml} \sin \frac{n\pi b}{l} \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi b}{l} \ddot{q}_i(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (1-199)$$

式中, ω_n 为裸梁的固有频率。式(1-199)是由 N 个方程成的耦合方程组,求解比较困难。但当仅考虑第一阶振型时,即当 $N = 1$ 时,令 $y_c = q_1$ 设为跨中挠度,且有 $\sin \frac{\pi a}{l} = \sin \frac{\pi b}{l}$, 方程(1-199)简化为

$$\ddot{y}_c(t) \left(1 + \frac{4M}{ml} \sin^2 \frac{\pi a}{l}\right) + \omega_1^2 y_c(t) = 0 \quad (1-200)$$

由此可得直接加载模型体系的一阶固有振动频率为

$$\hat{\omega}^2 = \omega_1^2 \frac{1}{1 + \frac{4M}{ml} \sin^2 \frac{\pi a}{l}} \quad (1-201)$$

式中, $\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_d}{m}}$ 为裸梁的一阶固有振动频率。于是,梁的动刚度可写成

$$EI_d = \frac{(lm + 4M \sin^2 \frac{\pi a}{l}) l^3}{\pi^4} \hat{\omega}^2 \quad (1-202)$$

当实测得到 $\hat{\omega}$ 后,由式(1-202)可计算与 M 相对应的动刚度 EI_d 。

由式(1-202)可见,动刚度受到附加质量 M 的显著影响,不能明确揭示出钢筋混凝土梁受到外荷载作用下截面开裂后动刚度随外力变化的内在规律,此模型缺陷较大。

1.8.2 弹性加载模型

如图 1-37 所示,钢筋混凝土梁受到对称的弹簧—质量体系的作用。相应的固有振动方程为

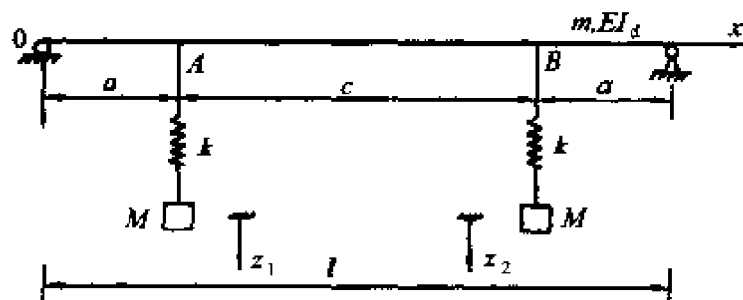


图 1-37 弹性加载试验模型

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y}(x,t) + EI_d \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} &= k[z_1(t) - y(x,t)\delta(x-a)] \\ &\quad + k[z_2(t) - y(x,t)\delta(x-b)] \\ M\ddot{z}_1(t) + kz_1(t) &= ky(x,t)\delta(x-a) \\ M\ddot{z}_2(t) + kz_2(t) &= ky(x,t)\delta(x-b) \end{aligned} \right\} \quad (1-203)$$

式中, $y(x,t)$ 、 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 均以静平衡位置为坐标原点。

对简支梁而言,利用振型的正交性可得主振型的固有振动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= \frac{2k[z_1(t) - \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi a}{l} q_i(t)] \sin \frac{n\pi a}{l}}{ml} \\ &\quad + \frac{2k[z_2(t) - \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi b}{l} q_i(t)] \sin \frac{n\pi b}{l}}{ml} \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \\ \ddot{z}_1(t) + \omega_0^2 z_1(t) &= \omega_0^2 \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi a}{l} q_i(t) \\ \ddot{z}_2(t) + \omega_0^2 z_2(t) &= \omega_0^2 \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi b}{l} q_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-204)$$

式中, $\omega_n = (\frac{n\pi}{l})\sqrt{\frac{EI_d}{m}}$ 为裸梁的固有频率; $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ 为弹簧—质量体系的固有频率。

引入 $\omega_e^2 = \frac{2K}{ml}$, 定义为相关频率, 则式(1-204)改写成

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) + \omega_e^2 \left[\sin \frac{n\pi a}{l} \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi a}{l} q_i(t) \right. \\ & \left. + \sin \frac{n\pi b}{l} \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi b}{l} q_i(t) \right] \\ & = \omega_e^2 \left[\sin \frac{n\pi a}{l} z_1(t) + \sin \frac{n\pi b}{l} z_2(t) \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \\ & \ddot{z}_1(t) + \omega_0^2 z_1(t) = \omega_0^2 \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi a}{l} q_i(t) \\ & \ddot{z}_2(t) + \omega_0^2 z_2(t) = \omega_0^2 \sum_{i=1}^N \sin \frac{i\pi b}{l} q_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-205)$$

上式共有 $N+2$ 个方程和 $N+2$ 个广义自由度坐标, 可采用数值方法求解。

工程上大多数振动主要以基频为主, 低阶振动比高阶振动显著得多。为了简化分析, 仅考虑一阶振动, 当 $N=1$ 时, 令 $y_c = q_1$ 设为跨中挠度, 则式(1-205)可简化成

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{y}_c(t) + (\omega_1^2 + 2\omega_e^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l}) y_c(t) \\ & = \omega_e^2 \sin \frac{\pi a}{l} [z_1(t) + z_2(t)] \\ & \ddot{z}_1(t) + \omega_0^2 z_1(t) = \omega_0^2 \sin \frac{\pi a}{l} y_c(t) \\ & \ddot{z}_2(t) + \omega_0^2 z_2(t) = \omega_0^2 \sin \frac{\pi a}{l} y_c(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-206)$$

设体系为简谐振动, 即

$$\ddot{y}_c = -\hat{\omega}^2 y_c, \ddot{z}_1 = -\hat{\omega}^2 z_1, \ddot{z}_2 = -\hat{\omega}^2 z_2$$

代入式(1-206), 于是关于 y_c 、 z_1 和 z_2 有非零解的条件是相应的系

数行列式为零,即得频率方程

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 + 2\omega_e^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l} - \hat{\omega}^2 & -\hat{\omega}_e^2 \sin \frac{\pi a}{l} & -\omega_0^2 \sin \frac{\pi a}{l} \\ -\omega_0^2 \sin \frac{\pi a}{l} & \omega_0^2 - \hat{\omega}^2 & 0 \\ -\omega_0^2 \sin \frac{\pi a}{l} & 0 & \omega_0^2 - \hat{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(\hat{\omega}^2 - \omega_0^2)[\hat{\omega}^4 - (\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\omega_e^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l})\hat{\omega}^2 + \omega_1^2 \omega_0^2] = 0 \quad (1-207)$$

其特征根为

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1^2 &= \omega_0^2 \\ \hat{\omega}_{2,3}^2 &= \frac{1}{2}[\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\omega_e^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l} \\ &\quad \pm \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\omega_e^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l})^2 - 4\omega_1^2 \omega_0^2}] \quad (1-208) \end{aligned}$$

上式中, $\hat{\omega}_i^2 (i=1,2,3)$ 的排列顺序依据其数值大小而定,最小值为第一阶固有频率,其余类推。

下面讨论两种特殊情况。

1. $k \ll \frac{48EI_d}{l^3}$, 即假设悬挂体系的刚度 k 对钢筋混凝土梁的影响可以略去不计,则

$$\frac{\omega_e^2}{\omega_1^2} = \frac{\frac{2k}{ml}}{\frac{\pi^4 EI_d}{l^4 m}} \approx \frac{k}{\frac{48EI_d}{l^3}} \rightarrow 0$$

因此,由式(1-208)可得

$$\hat{\omega}_{2,3}^2 = [\omega_0^2 + \omega_1^2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}]/2$$

当 $\omega_0^2 > \omega_1^2$ 时,前三阶固有频率分别为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_1^2 &= \omega_1^2 \\ \hat{\omega}_2^2 &= \hat{\omega}_3^2 = \omega_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-209)$$

当 $\omega_0^2 < \omega_1^2$ 时, 同样有

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_1^2 &= \hat{\omega}_2^2 = \omega_0^2 \\ \hat{\omega}_3^2 &= \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-210)$$

2. $k \leq \frac{48EI_a}{l^3}$, 同时 $M > \frac{ml}{2}$, 即附加质量较大时, 有

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \rightarrow 0$$

和

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = \frac{\frac{k}{M}}{\frac{\pi^4 EI_d}{l^4 m}} \approx \frac{k}{\frac{48EI_d}{l^3}} \cdot \frac{lm}{2M} \rightarrow 0$$

因此, 前三阶固有频率分别为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_1^2 &= \omega_0^2 \\ \hat{\omega}_2^2 &= \hat{\omega}_3^2 = \omega_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-211)$$

由上述讨论可知, 只要设计的弹性加载试验系统满足特定的条件, 就可以从梁的实测频率中滤除附加质量 M 的影响, 从而可反求出钢筋混凝土梁的动刚度

$$EI_d = \omega_1^2 \frac{l^4 m}{\pi^4} \approx \hat{\omega}_1^2 \frac{l^4 m}{\pi^4} \quad (1-212)$$

式中已经考虑了加载质量 M 较 $\frac{ml}{2}$ 一般大得多, 忽略了实测中的较小频率 ω_0^2 的存在, 从而保证 $\hat{\omega}_1^2$ 可取 ω_1^2 的值。

式(1-212)中的实测一阶频率就是裸梁的基频, 附加质量的存在并没有对实测基频产生任何影响。如果梁的实测基频发生变化, 说明钢筋混凝土梁的动刚度 EI_d 也随着变化, 明确地揭示了钢筋混凝土梁的动刚度与其工作状态(裂缝)之间的内在关系。

例 1.8.1 已知某钢筋混凝土 T 梁模型, 计算跨径 $l = 2.43\text{m}$,

C20 级混凝土, II 级受力钢筋, 混凝土弹性模量 $E_h = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$, 平均横截面面积 $A_0 = 146.074 \text{cm}^2$, 平均惯性矩 $I_0 = 12144.5 \text{cm}^4$, 容重 $r = 25.0 \text{kN/m}^3$, 弹簧刚度 $k = 24000 \text{N/m}$, $a = 0.60 \text{m}$ 。

悬挂不同的附加质量时梁的基率计算值和实测值列于表 1-6 中。

表 1-6

悬挂质量 $M(\text{kg})$		0	600	1100	1500	2000	2500
$\frac{\hat{\omega}}{2\pi}$ 计算值	一阶(Hz)		1.012	0.754	0.636	0.551	0.493
	二阶(Hz)	78.22	78.307	78.307	78.307	78.307	78.307
悬挂系统 $\omega_0/2\pi(\text{Hz})$			1.007	0.743	0.637	0.551	0.493
相关频率 $\omega_c/2\pi(\text{Hz})$			3.698	3.698	3.698	3.698	3.698
实测频率(Hz)		75.61	71.47	65.77	63.70	63.70	63.70
动刚度($\text{KN} - \text{m}^2$)		2969.71	2653.40	2247.04	2107.82	2107.82	2107.82

从图 1-38 和图 1-39 可见, 在滤除了附加质量 M 对试验梁的实测基频影响后, 钢筋混凝土梁的实测基频和动刚度随附加质量 M 的增加而减少。这个变化实质上是钢筋混凝土梁在外力 Mg 作用下受拉区出现了较多的竖向裂缝从而使截面中性轴不断上移的缘故。而桥规中梁的刚度取值规定 $0.85EI_0$, 只是全梁的一种平均取值, 不可能真实反映出梁受拉区裂缝发展的影响, 计算值只能是一条直线。

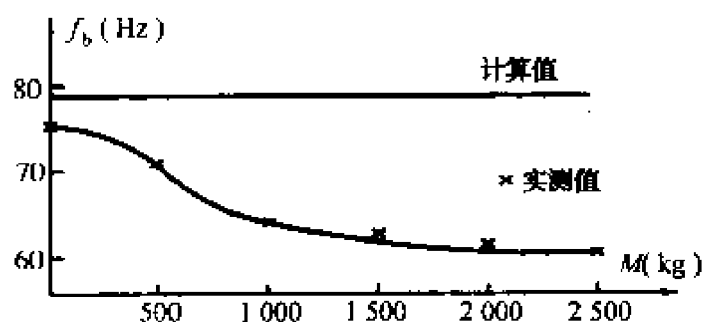


图 1-38 梁的基频与外力的关系

假如弹性加载系统作用于钢质试验梁, 则加载试验模型的基

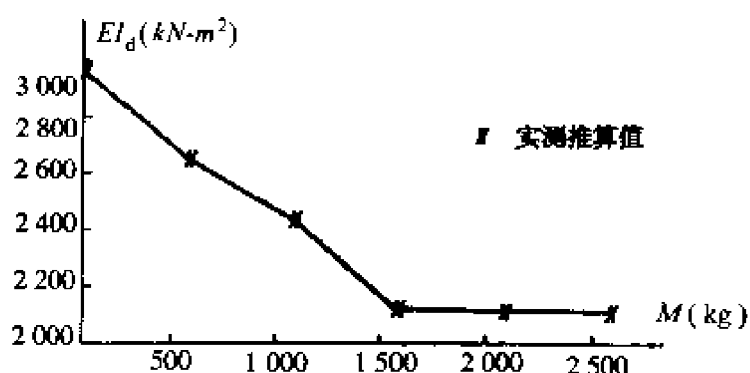


图 1-39 梁的动刚度推算值与外力的关系

频实测值与理论计算值将为两条互相平行的水平直线,两者之间仅相差一个测试系统的误差。

1.9 预应力钢梁桥的动刚度分析

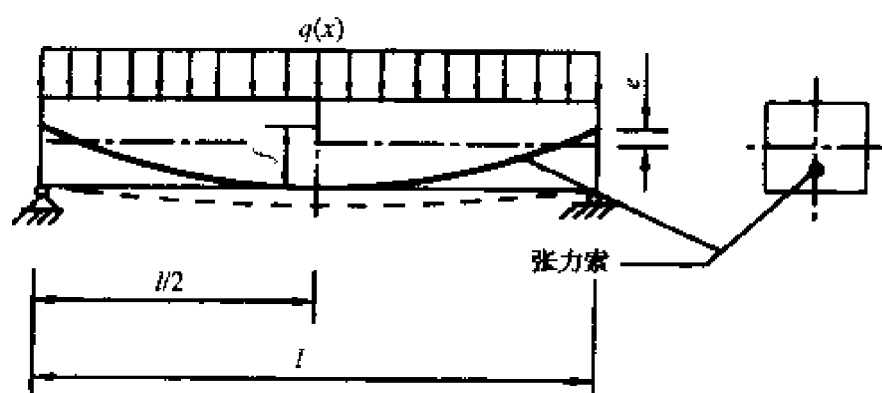
预应力钢梁桥是在钢梁体(箱)内设置体外无粘结预应力索而形成的索梁共同受力的组合梁桥。由于钢梁桥的静刚度与动刚度差别不大,这里假设取值相同而不予区别。本节应用达朗伯原理建立索梁组合钢梁桥的振动方程,并进行固有振动特性分析。

图 1-40 表示组合结构的计算分析简图,其中 e 为梁端预应力锚固点上偏心距, l 为简支钢梁计算跨径, H 为预应力索的张力水平分量, A_c 为预应力索的有效截面面积。同时假设钢梁的抗弯刚度 EI 和分布质量 m 均为常量。

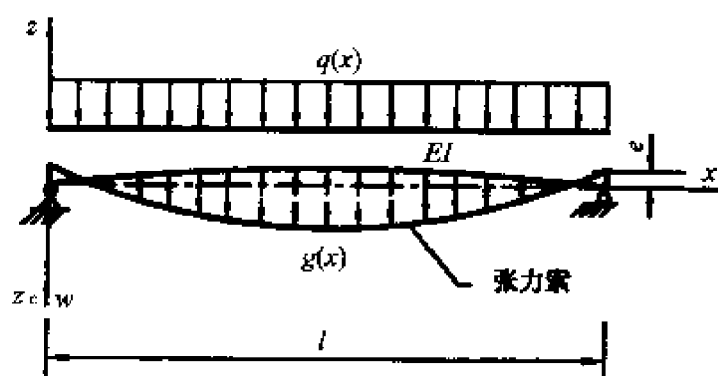
假设预应力索的线型在张拉前为二次抛物线,即

$$z_c = \frac{4f}{l^2} x(l-x) - e$$

张拉完成后钢梁的反拱曲线变为 $z(x)$, 索的形状曲线方程变为 $z_c(x) - z(x)$, 式中, x 为水平轴向坐标, 原点选在梁左端的截面形心处, q 为钢梁的恒载分布集度, 不计预应力索的自重。



a) 荷载状态



b) 索与梁相互作用状态

图 1-40 索梁组合钢梁计算简图

1.9.1 预应力索张拉后组合钢梁的平衡方程

假设钢梁与预应力索在索托的支撑下相互作用着分布力 $g(x)$ (索托假设为密布) 而无切向力, 在预应力索张拉过程中索梁相互作用, 共同变形, 互相影响。由图 1-41, 可写出微元体平衡方程

$$\sum M = 0 \quad dM - Qdx + Hdz = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad (g - q)dx - dQ = 0$$

整理得

$$\frac{dM}{dx} - Q + H \frac{dz}{dx} = 0$$

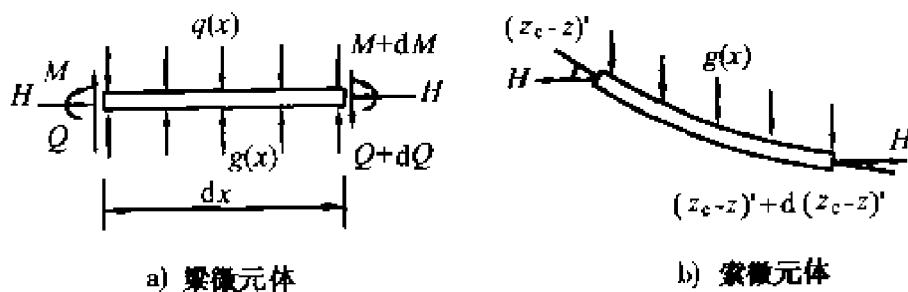


图 1-41 微元体的平衡

即

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} + H \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \quad (1-213)$$

和

$$\frac{dQ}{dx} = g(x) - q(x) \quad (1-214)$$

合并式(1-213)和式(1-214),得

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + H \frac{d^2 z}{dx^2} = g(x) - q(x) \quad (1-215)$$

由材料力学可知,取 z 向上为正向反拱度,则

$$M = EI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

代入式(1-215)后,得

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} + H \frac{d^2 z}{dx^2} = g(x) - q(x) \quad (1-216)$$

同样,在索梁共同变形后可得索的平衡方程为

$$-H \frac{d^2 (z_c - z)}{dx^2} = g(x) \quad (1-217)$$

将式(1-217)代入式(1-216),得

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} + H \frac{d^2 z_c}{dx^2} = -q(x) \quad (1-218)$$

上式即为恒载作用下预应力索张拉并锚固后组合钢梁的平衡微分

方程。

1.9.2 组合钢梁桥的固有振动方程

假设组合钢梁受到挠动后发生了向下为正方向的动挠度 $w(x, t)$, 相应的索力也产生了一个水平分量增量 $h(t)$, 预应力钢索与钢梁之间的互相作用力的增值为 $r(x, t)$, 不计阻尼的影响, 则式(1-216)和式(1-217)可分别写成

$$EI \frac{\partial^4(z-w)}{\partial x^4} + (H+h) \frac{\partial^2(z-w)}{\partial x^2} = g + r - q + m\ddot{w} \quad (1-219)$$

$$- (H+h) \frac{\partial^2(z_c - z + w)}{\partial x^2} = g + r \quad (1-220)$$

将式(1-220)代入式(1-219), 并注意 $(z_c - z)$ 与 t 无关, 则

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} + H \frac{d^2 z_c}{dx^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h \frac{d^2 z_c}{dx^2} = -q(x) + m\ddot{w} \quad (1-221)$$

引入式(1-218), 上式可进一步简化为

$$m\ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h \frac{d^2 z_c}{dx^2} = 0 \quad (1-222)$$

上式即为索梁组合钢梁桥的固有振动方程。方程左边前二项为一般梁的固有振动项; 最后一项为预应力的贡献。显然, 方程(1-222)与梁在两端承受外部轴向力作用下的振动方程(1-40)有本质差别, 这是预应力作为体系内力的特点所在。从式(1-222)可以看出, 只有曲线布置预应力索才对钢梁的固有振动产生影响。

预应力索长在张拉完成并锚固后变为

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} \right]^2} dx$$

当组合钢梁受到扰动后, 索长改变为

$$L + \Delta L = \int_0^l \sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2} dx$$

式中, 索长改变量

$$\begin{aligned}
 \Delta L &= \int_0^l \left\{ \sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2} - \sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} \right]^2} \right\} dx \\
 &= \int_0^l \frac{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 - \left\{ 1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} \right]^2 \right\}}{\sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2} + \sqrt{1 + \left[\frac{d(z_c - z)}{dx} \right]^2}} dx \\
 &\approx \int_0^l \frac{d(z_c - z)}{dx} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx \\
 &= \frac{d(z_c - z)}{dx} \cdot w \Big|_0^l - \int_0^l \frac{d^2(z_c - z)}{dx^2} w dx \\
 &= \frac{1}{H} \int_0^l g(x) w dx
 \end{aligned} \tag{1-223}$$

式中, 引用了简支梁两铰支承条件

$$w(0, t) = w(l, t) = 0$$

同时, ΔL 可写成

$$\Delta L = \frac{hL}{E_c A_c}$$

代入式(1-223), 有

$$h(t) = \frac{E_c A_c}{HL} \int_0^l g(x) w(x, t) dx \tag{1-224}$$

式(1-223)显然具有能量守恒的物理意义, 其中 $g(x)$ 为钢梁自重作用下预应力索张拉完成并锚固后的索与梁之间的作用力, 可由式(1-218)和式(1-217)求得。这样, 组合梁的固有振动方程将由式(1-222)和式(1-224)联立给出。

由于已知 $z_c(x)$ 的函数式, 则

$$\frac{d^2 z_c}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}$$

同时设恒载 q 为常数,由式(1-218)可得

$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} = -q + \frac{8Hf}{l^2} \quad (1-225)$$

积分上式,并考虑边界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x = 0, l \text{ 时, } z &= 0 \\ EI \frac{d^2 z}{dx^2} &= He \end{aligned} \right\}$$

得

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{24EI} \left(-q + \frac{8Hf}{l^2} \right) x^4 - \frac{l}{12EI} \left(-q + \frac{8Hf}{l^2} \right) x^3 + \frac{He}{2EI} x^2 \\ &\quad + \left[\frac{l^3}{24EI} \left(-q + \frac{8Hf}{l^2} \right) - \frac{He}{2EI} \right] x \end{aligned}$$

代入式(1-217)可得

$$\begin{aligned} g(x) &= -H \frac{d^2(z_c - z)}{dx^2} \\ &= \frac{8Hf}{l^2} + \frac{H}{2EI} \left(-q + \frac{8Hf}{l^2} \right) (x^2 - lx) + \frac{H^2 e}{EI} \end{aligned} \quad (1-226)$$

上式说明,索梁之间的相互作用力是不均匀的,呈二次抛物线分布。

如令组合梁的动挠度

$$w(x, t) = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t \quad (1-227)$$

代入式(1-224),则得

$$h(t) = \frac{E_c A_c}{L} A \left[\frac{16f}{\pi l} - \frac{2l^3}{EI\pi^3} \left(-q + \frac{8Hf}{l^2} \right) + \frac{2Hel}{EI\pi} \right] \sin \omega t \quad (1-228)$$

式中,索长

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz_c}{dx} \right)^2} dx \approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dz_c}{dx} \right)^2 \right] dx = \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right] l$$

例 1.9.1 钢模型梁的刚度 $EI = 1422.0705 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, 计算跨径 $l =$

4m, 分布质量 $m = 250\text{kg/m}$, 自重 $q = 2.5\text{kN/m}$, 索的矢高 $f = 0.1\text{m}$, 有效截面积 $A_c = 140\text{mm}^2$, 索的弹性模量 $E_c = 195\text{kN/mm}^2$, 预应力索初张力的水平分量 $H = 82.9\text{kN}$, $e = 0$ 。

由式(1-228)可得

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{140 \times 195}{4.01} \left[\frac{16 \times 0.1}{4\pi} - \frac{2 \times 4^3}{1422.0705} \right. \\ &\quad \left. \left(-2.5 + \frac{8 \times 82.9 \times 0.1}{4^2} \right) \right] A \sin \omega t \\ &= 834.31 A \sin \omega t \end{aligned}$$

式中, A 的量纲为 m 。

采用伽辽金法求固有频率。由式(1-222), 有

$$\int_0^l \left[EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + h \frac{8f}{l^2} - m\omega^2 w \right] \delta w dx = 0$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{8f}{l^2} \times 834.31 \right. \\ \left. - m\omega^2 \sin \frac{\pi x}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l} \sin^2 \omega t dx \delta A = 0 \end{aligned}$$

积分后整理, 得

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{EI\pi^5 + 32 \times 834.31 f l^2}{m\pi l^4} \\ &= \frac{1422.0705\pi^5 + 32 \times 834.31 \times 0.1 \times 4^2}{250\pi \times 4^4 \times 10^{-3}} = 2376.87 \end{aligned}$$

即

$$\omega = 48.753\text{s}^{-1}$$

而无索力作用时, 有 $h(t) = 0$, 代入方程(1-222), 得

$$\omega_0 = 46.523\text{s}^{-1}$$

比较可知, 计入索力作用后, 钢梁的基频提高了 4.8%。

有 ω^2 的值, 即可求得组合钢梁桥的动刚度

$$\begin{aligned}
 EI_d &= \frac{l^4 m}{\pi^4} \omega^2 \\
 &= \frac{4^4 \times 250}{\pi^4} \times 2376.87 \\
 &= 1561.658 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}$$

与原钢梁的刚度相比,提高了 9.82%。

从以上例题可见,只有曲线布置的预应力钢索才可能提高原来钢梁的动刚度,而且提高的数量不大。

第二章 拱桥振动

拱桥是公路桥梁的基本形式之一,特别是在地质良好、地形合适的条件下建造拱桥,不但具有显著的经济意义,而且以其美丽的外形和内在的特性,深受人们的喜爱。我国公路桥梁中,拱桥占有相当大的比例。

近几十年来,国内外已建造了不少跨度在 300m 以上的拱桥。随着拱桥跨径的增大,拱桥振动问题突出出来。

第二次世界大战前,拱桥的振动理论研究处于基础阶段。在机械振动学中的圆环振动理论的基础上引出了对圆弧拱振动的研究,建立了拱桥振动方程,讨论了简单支承条件下的拱桥自由振动问题。

本世纪 60 年代前的一二十年中,拱桥振动理论迅速发展并趋向成熟。国内外众多学者先后用能量法、影响系数法(力法)和弹性系数(位移法)对拱结构的振动做了大量的数值分析工作。他们通过近似解析和简化数值分析的方法揭示了拱桥的基本振动特性和响应规律,为拱桥振动理论发展作出了重大贡献。

近几十年来,由于电子计算机的问世和有限单元法的创立,给拱桥的动力分析带来了革命性变化。各种动荷载作用下的拱桥振动响应都可统一成规格化的形式用通用程序来处理,对实际拱桥结构的精确模型进行非线性的时程分析也同样没有困难。但是,用近似手段来揭示影响拱振动特性的各参数之间的内在关系仍然保持着重要的理论价值。在一定的条件下,近似解析方法所提供的实用计算公式以其形式简单、物理概念明确、又具有足够工程精度的突出优点而为工程技术人员所乐于采用,也是公路桥梁现行规范中许多近似公式的理论基础。因此,本章将利用梁桥振动中

介绍的近似方法,研究拱桥固有振动的基本动力特性,为进一步讨论拱桥在各种动荷载作用下的强迫振动奠定基础。

一般的桥梁横截面都设计成左右对称,也就是说经过桥梁纵向对称轴线的竖平面是一个对称平面。因此,拱桥在这个竖平面内的挠曲振动和垂直于该平面的侧向弯曲—扭转振动就可以分开来单独处理,从而使问题得到简化。

在本章中,将分别从拱桥的竖平面内挠曲和竖平面外的侧向弯扭静力平衡方程出发,运用达朗贝尔原理引入相应的惯性力项,以得到拱桥的振动方程。

2.1 拱桥的静力平衡方程

2.1.1 圆弧拱的平面挠曲平衡方程

现以左右对称的单跨拱桥为考察对象,建立曲线坐标系如图 2-1 所示。由微元的平衡条件、变形几何关系以及内力和变形的物理关系来建立拱的平面挠曲基本方程。

1. 平衡条件

图 2-2 表示拱发生面内弯曲后,微元 $ds = R d\varphi$ (R 为曲率半径)在径向荷载 p_r 和切向荷载 p_s 以及内力 N 、 Q 和 M 的作用下处于平衡状态。假设这里为小位移问题,在建立平衡状态时,忽略几何尺寸改变量的影响。图中所示内力均为正方向。

由切向力、径向力和弯矩的平衡条件,得

$$\left. \begin{aligned} dN + Q d\varphi - p_s ds &= 0 \\ dQ - N d\varphi + p_r ds &= 0 \\ dM - Q ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= P_s - \frac{Q}{R} \\ \frac{dQ}{ds} &= -P_r + \frac{N}{R} \\ \frac{dM}{ds} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

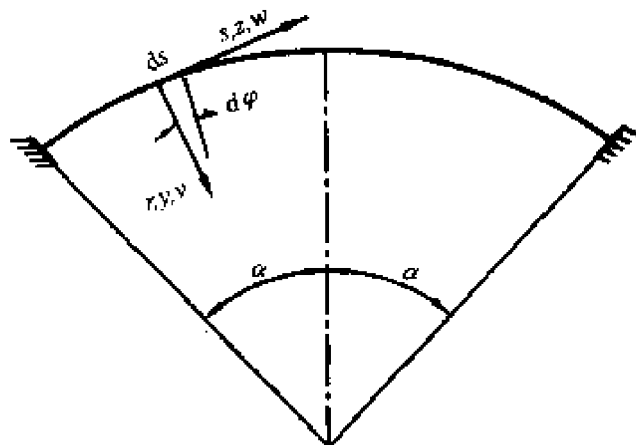


图 2-1 单跨拱桥

将式(2-2)中的第三式分别代入第一式和第二式,消去 Q 后则

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M}{ds^2} - \frac{N}{R} &= -p_r \\ \frac{dN}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dM}{ds} &= p_s \end{aligned} \right\} (2-3)$$

上式即为拱内力表示的平衡方程。

2. 变形几何关系

图 2-3 表示拱微元 $\widehat{mn}$ 在平面挠曲变形后位移至新的位置 $\widehat{m'n'}$ 。设 m 点径向和切向位移分别为 v 和 w 。由图可知,由位移 v 在截面 m

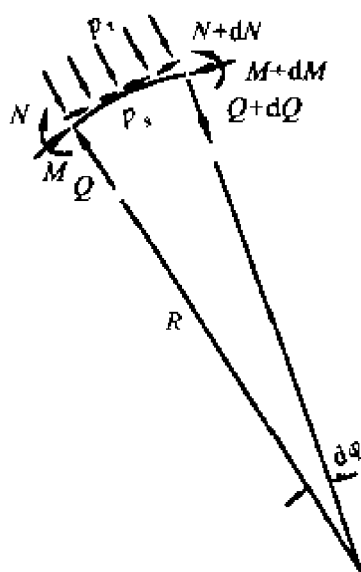


图 2-2

所引起的转角为 $\frac{dv}{ds}$;由位移 w 所引

起的转角为 $w/(R-v)$,可近似地取为 w/R 。所以在 v 和 w 的共同影响下截面 m 的转角为

$$\beta = \frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} \quad (2-4)$$

于是,可得微元 ds 的曲率改变量即单位弧长转角的增量为

$$K_x = \frac{d}{ds} \left(\frac{w}{R} + \frac{dv}{ds} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) \quad (2-5)$$

微元 ds 由于切向位移 w 所引起的伸长为 dw ; 由于径向位移 v 所引起的伸长为 $(R - v)d\varphi - Rd\varphi$ 即 $\sim v d\varphi$ 。因此, 微元 ds 的单位弧长伸长为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{dw}{ds} - \frac{v d\varphi}{ds} \\ &= \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \quad (2-6) \end{aligned}$$

如假设拱轴可视为无伸缩的, 即可令 $\epsilon = 0$, 根据此条件, 由式 (2-6) 可得

$$\frac{dw}{ds} = \frac{v}{R} \quad (2-7)$$

上式就是拱轴不可伸缩变形条件。

3. 内力和变形的物理关系

弯矩 M 和轴力 N 与挠曲率 K_x 和伸长率 ϵ 的关系可写为

$$\left. \begin{aligned} M &= -EI_x K_x = -EI_x \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{dw}{R ds} \right) \\ N &= -EF \epsilon = -EF \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

式中, EI_x 和 EF 分别为拱截面在拱平面内的抗弯刚度和抗拉(压)刚度。

4. 弹性平衡方程

将式 (2-8) 代入式 (2-3) 便可得到拱的平面挠曲弹性平衡微分

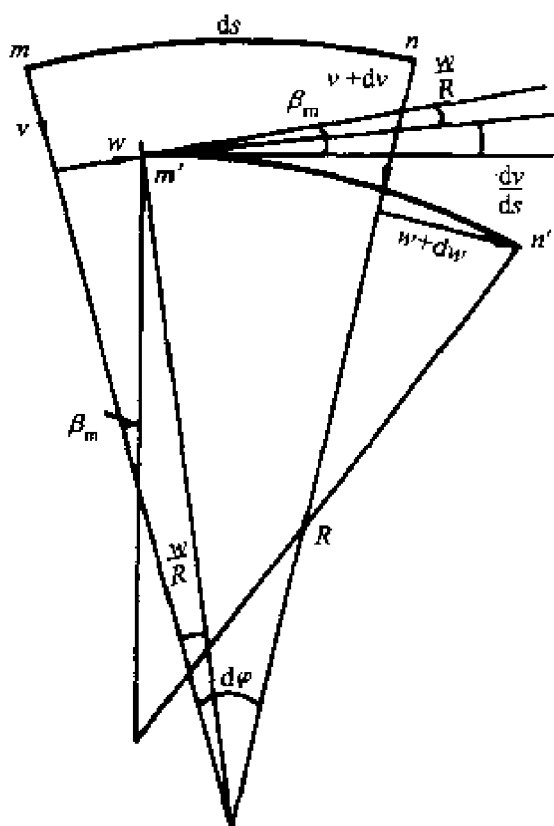


图 2-3

方程

$$\left. \begin{aligned} \left[EI_x \left(v'' + \frac{w'}{R} \right) \right]'' - \frac{EF}{R} \left(w' - \frac{v}{R} \right) &= p_r \\ \left[EF \left(w' - \frac{v}{R} \right) \right]' + \left[\frac{EI_x}{R} \left(v'' + \frac{w'}{R} \right) \right]' &= -p_s \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中，“'”表示关于曲线坐标 s 的导数。

对于等截面拱， EI_x 和 EF 均为常数，上式简化为

$$\left. \begin{aligned} EI_x \left(v'' + \frac{w'}{R} \right)'' - \frac{EF}{R} \left(w' - \frac{v}{R} \right) &= p_r \\ EF \left(w' - \frac{v}{R} \right)' + \frac{EI_x}{R} \left(v'' + \frac{w'}{R} \right)' &= -p_s \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

对于等截面圆弧拱， $R = \text{常数}$ ，上式可进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} EI_x \left(v^{(4)} + \frac{w'''}{R} \right) - \frac{EF}{R} \left(w' - \frac{v}{R} \right) &= p_r \\ EF \left(w'' - \frac{v'}{R} \right) + \frac{EI_x}{R} \left(v''' + \frac{w''}{R} \right) &= -p_s \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

这是一般常用的圆弧拱的弹性平衡方程。

2.1.2 抛物线拱的平面挠曲平衡方程

实际拱桥的拱轴线一般并不是圆弧线，例如大跨径的钢拱桥、钢管混凝土拱桥大多数都采用抛物线型的拱轴线；圬工拱桥的拱轴线一般也都是悬链线型的。大跨径拱桥挠曲较大，有必要考虑轴向压力的二次影响，即按二阶理论进行分析。本小节以抛物线拱为例，为了以后推导便于实际应用的按二阶理论建立的振动方程，这里采用直角坐标系来描述抛物线拱的静力平衡方程。

现以图 2-4 所示的抛物线拱为研究对象，拱轴线方程为

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (2-12)$$

式中， l 为拱的计算跨径； f 为拱的矢高。

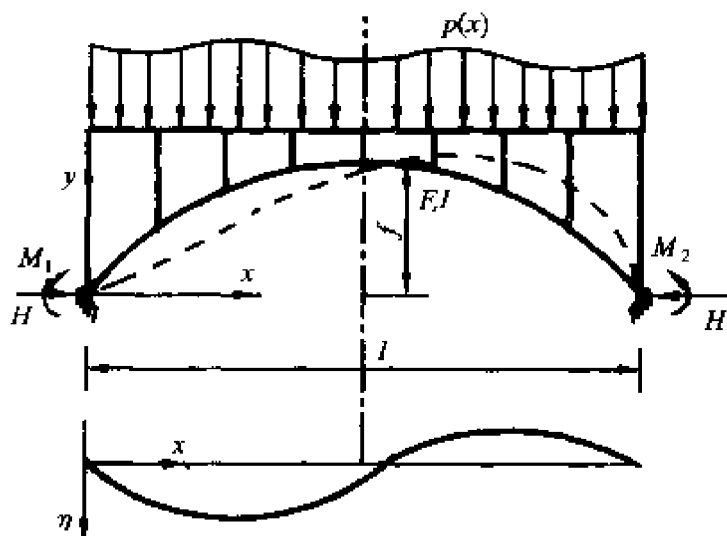


图 2-4

拱的竖向挠度 $\eta(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 的关系为

$$-EI_z \cos \varphi \eta''(x) = M(x) = M_0(x) + M_1 \frac{x}{l} + M_2 \frac{l-x}{l} - H[y(x) - \eta(x)] \quad (2-13)$$

式中, EI_z 为拱圈截面的抗弯刚度; $M_0(x)$ 为同跨径简支梁相应截面处的弯矩; M_1 、 M_2 分别为左、右拱脚处的固端弯矩; l 为拱的计算跨径; H 为拱的水平推力且为常数。

将上式对 x 求导两次, 同时注意到右边前三项的两阶导数就是拱的竖向分布荷载 $-p(x)$, 则得

$$[EI_z \cos \varphi \eta'']'' - H(y'' - \eta'') = p(x) \quad (2-14)$$

上式中的水平推力是未知量, 应当按拱两脚相对水平位移的条件来决定。如图 2-5 所示, 拱圈的一个微段 ds 在平面挠曲变形后发生变位且长度变为 $ds + \Delta ds$ 。由几何关系

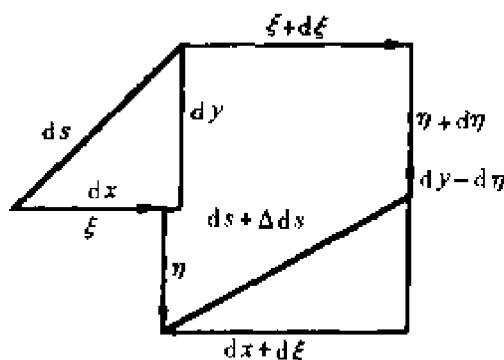


图 2-5

$$(ds + \Delta ds)^2 = (dx + d\xi)^2 + (dy - d\eta)^2$$

和

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

上两式相减,并忽略高阶微量,得

$$\xi' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\Delta ds}{ds} + y' \eta' \quad (2-15)$$

其中, $\frac{\Delta ds}{ds}$ 为拱轴的伸长率,且有下列关系

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon = -\frac{N}{EF} = -\frac{H \cos \varphi + V \sin \varphi}{EF} \quad (2-16)$$

式中, H 为任意截面 x 处的水平推力且为常数, V 为相应截面处的竖向力(注意与剪力 Q 的区别)。

将式(2-16)代入式(2-15),并对 x 从 0 到 l 积分,便得到拱两端的相对水平位移

$$\Delta l = \int_0^l \xi' dx = \int_0^l y' \eta' dx - \int_0^l \frac{1}{EF} \left(\frac{H}{\cos \varphi} + \frac{V \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) dx$$

对于两端位置固定拱,则

$$\Delta l = 0$$

由此可得求 H 的方程为

$$H \int_0^l \frac{dx}{EF \cos \varphi} = \int_0^l y' \eta' dx - \int_0^l \frac{V y'}{EF \cos \varphi} dx \quad (2-17)$$

式中, $y' = \operatorname{tg} \varphi$ 为拱轴在任意点的斜率。

对于系杆拱,两端相对水平位移 Δl 可表示为一定的数值,同样可得与式(2-17)相类似的方程。

式(2-14)和式(2-17)就是抛物线拱按二阶理论建立的平面挠曲的两个基本方程。它们适应于两端无相对位移的两铰拱或无铰拱。式(2-14)左边的第二项中的 $H\eta''$ 就是考虑拱的轴力二次影响的项,它对于大跨径拱桥是不可忽视的。

为了简化计算,以便于说明问题的本质,近似地令

$$EF \cos \varphi = EF_c \text{ 和 } EI_x \cos \varphi = EI_c$$

均为常数,即截面按余弦规律从拱顶向拱脚逐渐增大,这样的假设

是接近实际情况的,因而是合理的,具有一般性。

注意到通过分部积分,有

$$\int_0^l y' \eta' dx = [y' \eta]_0^l - \int_0^l y'' \eta dx = -y'' \int_0^l \eta dx$$

上式中引用了拱的两端边界条件 $\eta = 0$, 同时 y'' 对于抛物线拱是常数。其次有

$$\int_0^l \frac{V y'}{EF \cos \varphi} dx = \frac{1}{EF_c} \{ [V y]_0^l - \int_0^l V' y dx \} = -\frac{1}{EF_c} \int_0^l V' y dx$$

上式中引用了拱的两端拱轴线坐标 $y = 0$ 的条件。由式(2-14), 有

$$V' = -p(x) = -EI_c \eta^{(4)} - H \eta'' + H y''$$

代入上式, 积分得

$$\int_0^l V' y dx = -EI_c \int_0^l \eta^{(4)} y dx - H \int_0^l \eta'' y dx + H \int_0^l y'' y dx \quad (2-18)$$

式(2-18)右边第一项积分为

$$\begin{aligned} -EI_c \int_0^l \eta^{(4)} y dx &= -EI_c \{ [\eta''' y]_0^l - \int_0^l \eta''' y' dx \} \\ &= EI_c \int_0^l y' \eta''' dx \\ &= EI_c \{ [y' \eta'']_0^l - \int_0^l y'' \eta'' dx \} \\ &= -EI_c y'' \int_0^l \eta'' dx \end{aligned}$$

式中利用拱两端的边界条件 $y = 0$ 和 $\eta'' = 0$, 相应于铰支承拱。

式(2-18)右边第二项积分为

$$\begin{aligned} -H \int_0^l \eta'' y dx &= -H \{ [\eta' y]_0^l - \int_0^l \eta' y' dx \} \\ &= H \int_0^l \eta' y' dx \\ &= H \{ [\eta y']_0^l - \int_0^l \eta y'' dx \} \\ &= -H y'' \int_0^l \eta dx \end{aligned}$$

式中引用了拱两端的边界条件 $y = 0$ 和 $\eta = 0$ 。

式(2-18)右边第三项积分为

$$\begin{aligned} H \int_0^l y'' y dx &= H \{ [y' y]_0^l - \int_0^l y'^2 dx \} \\ &= - H \int_0^l y'^2 dx \end{aligned}$$

同时,式(2-17)左边积分为

$$H \int_0^l \frac{dx}{EF \cos \varphi} = \frac{H}{EF_c} \int_0^l dx = \frac{Hl}{EF_c}$$

将上述各积分式分别代入式(2-17),即得

$$\frac{Hl}{EF_c} = - y' \left[\int_0^l \eta dx + \frac{EI_c}{EF_c} \int_0^l \eta'' dx + \frac{H}{EF_c} \int_0^l \eta dx \right] - \frac{H}{EF_c} \int_0^l y'^2 dx$$

上式中右边方括号中的后二项与第一项相比是微不足道的,忽略它们后,整理得方程

$$\frac{H}{EF_c} \int_0^l (1 + y'^2) dx = - y' \int_0^l \eta dx$$

因此,有

$$H = \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^l \eta dx \quad (2-19)$$

式中, $\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{y''} = \frac{l^2}{8f}$, 为抛物线拱的近似曲率半径; $L = \int_0^l [1 + y'^2] dx = l \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]$, 为等效拱轴线长度,但与拱轴线长度不同。

于是,式(2-14)和式(2-19)就组成了抛物线拱的平面挠曲弹性平衡方程。

2.1.3 拱桥的空间弯扭平衡方程

竖平面内的拱轴,在侧倾后是一根空间的曲线如图 2-6 所示,其位移和变形的几何关系宜用曲线坐标来描述(取右手系)。拱侧倾后,任意截面在 x 轴(垂直于拱平面,即侧向)、 y 轴(指向拱微段 ds 的曲率中心,即径向)以及 z 轴(即切向)三个方向的线位移和

角位移分别为 $u, v, w; \beta, \gamma, \theta$ 。另外,再取一组坐标轴 ξ, η, ζ ,其方向是相对于变形的拱面选定的,其中 ξ 与 η 的方向与横截面的两个主轴重合, ζ 轴则为拱形心轴的切线。

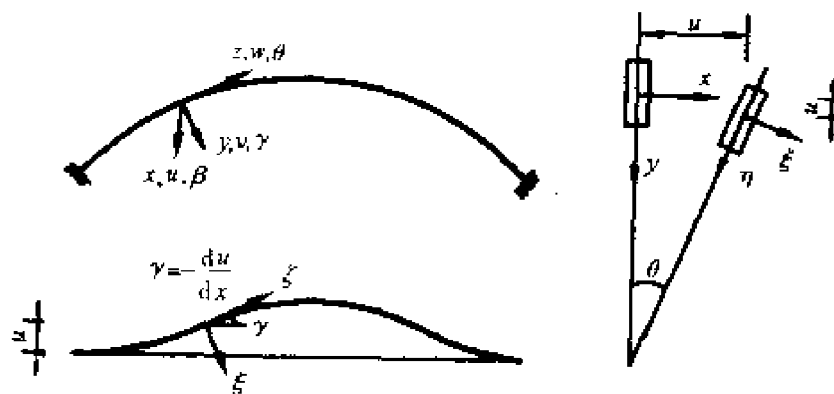


图 2-6 拱的侧倾

1. 侧向弯曲与扭转的微分方程

设作用在变形后拱微段 ds 上的力矩 M_ξ, M_η 和 M_ζ 以图 2-7 所示的方向为正。再假设材料服从虎克定律,变形保持微小,截面的几何形状不因变形而发生改变。那么,根据材料力学可写出拱的侧向弯曲和扭转的微分方程如下

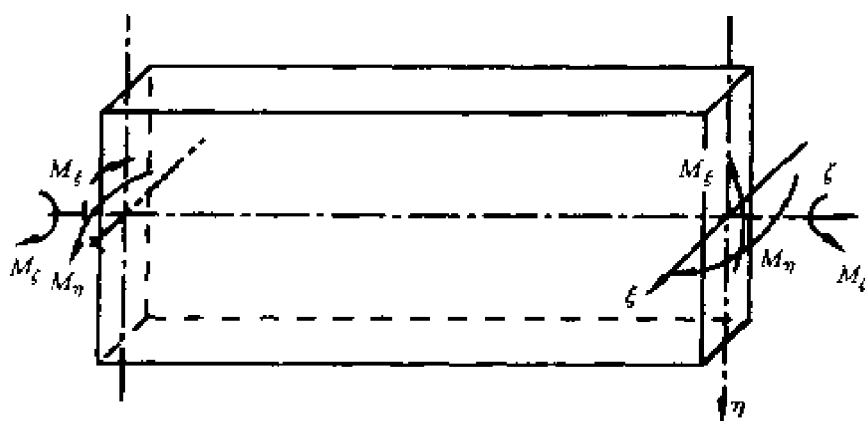


图 2-7

$$\left. \begin{aligned} EI_y K_y &= M_\eta \\ GI_d K_z - (EI_w K'_z)' &= M_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

式中, I_y 为拱的横截面对于 y 轴(η 轴)的惯性矩; GI_d 、 EI_w 分别为自由扭转刚度和约束扭转刚度; K_y 、 K_z 分别为绕 y 轴的侧向挠曲率和绕 z 轴的扭曲率; 式中的“'”表示关于曲线坐标 s 的导数。

2. 变形几何关系

如图 2-8 所示, 相距 ds 的两截面绕 y 轴的转角的增量为

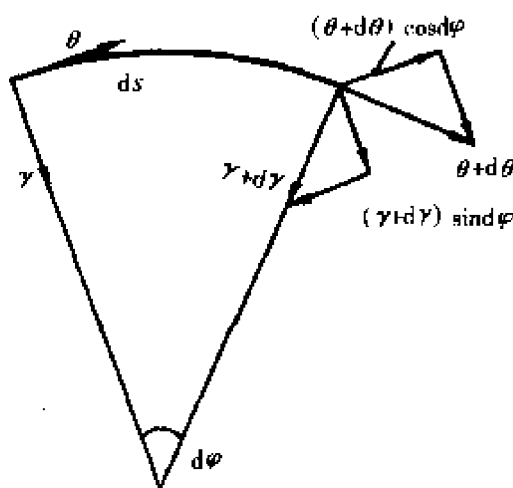


图 2-8 角位移向量

$$(\gamma + d\gamma) \cos(d\varphi) + (\theta + d\theta) \sin(d\varphi) - \gamma$$

在小变位条件下, 有 $\cos(d\varphi) \approx 1$, $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$, 并略去高阶微量, 则有

$$d\gamma + \theta d\varphi$$

因此, 绕 y 轴的侧向挠曲率 K_y 为

$$K_y = \frac{d\gamma + \theta d\varphi}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\theta}{R} \quad (2-21)$$

相距 ds 的两截面绕 z 轴的转角的增量为

$$(\theta + d\theta) \cos(d\varphi) - \theta - (\gamma + d\gamma) \sin(d\varphi)$$

同理, 则有

$$d\theta - \gamma d\varphi$$

故绕 z 轴的扭曲率 K_z 为

$$K_z = \frac{d\theta - \gamma d\varphi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\gamma}{R} \quad (2-22)$$

因为 $\gamma = -\frac{du}{ds}$, 则式(2-21)和(2-22)改写为

$$\left. \begin{aligned} K_y &= -\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\theta}{R} \\ K_z &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

3. 基本平衡方程

图 2-9 表示拱的微元在发生空间扭转变形后将受到截面内力:侧向弯矩 M_η 、扭矩 M_ζ 、侧向剪力 Q_ζ 和轴力 N_ζ 以及外荷载 p_ζ 、 m_η 和 m_ζ 的作用。其中 m_η 和 m_ζ 分别为荷载对主轴 η 、 ζ 所形成的外力分布力矩,图中未示。

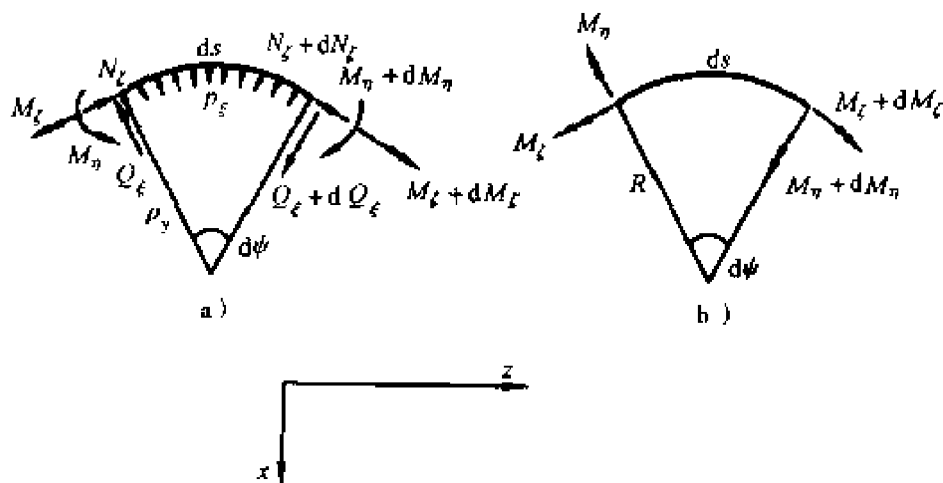


图 2-9 拱微元体受力分析

下面利用微元体的平衡条件建立平衡方程。由

$$\sum F_\zeta = 0$$

得

$$Q_{\zeta} + dQ_{\zeta} - p_{\zeta}ds - N_{\zeta}\sin(d\psi) - Q_{\zeta}\cos(d\psi) = 0$$

并注意到 $\sin(d\psi) \approx d\psi = \frac{ds}{\rho_y} = K_y ds$, 则有

$$dQ_{\zeta} - N_{\zeta}K_y ds - p_{\zeta}ds = 0$$

即

$$\frac{dQ_{\zeta}}{ds} - K_y N_{\zeta} - p_{\zeta} = 0 \quad (2-24)$$

在建立 $\sum M_{\eta} = 0$ 时, 除考虑剪力 Q_{ζ} 的影响外, 还应考虑微元 ds 上弯矩 M_{η} 、扭矩 M_{ζ} 和荷载分布力矩 m_{η} 的影响。 p_{ζ} 和 N_{ζ} 的影响均为二阶微量, 可略去不计。于是由

$$\sum M_{\eta} = 0$$

得

$$M_{\eta} + dM_{\eta} - M_{\eta}\cos(d\varphi) + M_{\zeta}\sin(d\varphi) + m_{\eta}ds + Q_{\zeta}ds = 0$$

引入

$$d\varphi = \frac{ds}{R}$$

则有

$$\frac{dM_{\eta}}{ds} + \frac{M_{\zeta}}{R} + Q_{\zeta} + m_{\eta} = 0 \quad (2-25)$$

再由

$$\sum M_{\zeta} = 0$$

得

$$M_{\zeta} + dM_{\zeta} - M_{\zeta}\cos(d\varphi) - M_{\eta}\sin(d\varphi) + m_{\zeta}ds = 0$$

即

$$\frac{dM_{\zeta}}{ds} - \frac{M_{\eta}}{R} + m_{\zeta} = 0 \quad (2-26)$$

式(2-24)和式(2-25)可合为一个式子。因为拱在侧倾时轴向力变化很小, 故可取 $N_{\zeta} = N$ 。于是由式(2-24)得

$$\frac{dQ_{\zeta}}{ds} = K_y N + p_{\zeta}$$

在式(2-25)中略去侧向分布力矩 m_η , 再求导一次, 将上式代入后则有

$$\frac{d^2 M_\eta}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{M_\xi}{R} \right) + K_y N + p_\xi = 0 \quad (2-27)$$

式(2-26)和式(2-27)两式联立, 即得以内力描述的基本平衡方程组。

将物理关系式(2-20)和几何关系式(2-23)代入式(2-26)和式(2-27), 即可得到以位移描述的拱空间侧向弯扭的弹性平衡方程

$$\left. \begin{aligned} & - \left[EI_y \left(u'' - \frac{\theta}{R} \right) \right]'' + \left[\frac{GI_d}{R} \left(\theta' + \frac{u'}{R} \right) \right]' \\ & - \left[\frac{EI_w}{R} \left(\theta' + \frac{u'}{R} \right) \right]'' + N \left(-u'' + \frac{\theta}{R} \right) + P_\xi = 0 \\ & \left[GI_d \left(\theta' + \frac{u'}{R} \right) \right]' - \left[EI_w \left(\theta' + \frac{u'}{R} \right)' \right]'' \\ & + \frac{EI_y}{R} \left(u'' + \frac{\theta}{R} \right) + m_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

对于等截面圆弧拱, 上式可进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} & (EI_y + \frac{EI_w}{R^2}) u^{(4)} + (N - \frac{GI_d}{R^2}) u'' \\ & + \frac{EI_w}{R} \theta^{(4)} - \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' - \frac{N}{R} \theta = p_\xi \\ & EI_w \theta^{(4)} - GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + \frac{EI_w}{R} u^{(4)} \\ & - \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' = m_\xi \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

式中, u 和 θ 分别为拱的侧向位移和拱轴扭转角; EI_y 、 GI_d 和 EI_w 分别为拱截面的侧向抗弯刚度、自由扭转刚度和约束扭转刚度; R

为圆弧拱的曲率半径;式中的“'”表示关于曲线坐标 s 的导数。

2.2 拱桥的固有振动

2.2.1 圆弧拱的平面弯曲固有振动

如图 2-1 所示的曲线坐标系下的拱桥,在拱的平面挠曲弹性平衡方程(2-11)的基础上,引入达朗贝尔惯性力

$$\left. \begin{aligned} p_r &= -m\ddot{v}(s, t) \\ p_s &= -m\ddot{w}(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

式中, m 为单位拱轴弧长的质量分布。由此可得拱的平面挠曲固有振动的基本方程。

线性方程的振动是简谐的,有

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(s, t) &= -\omega^2 V(s) \sin \omega t \\ \ddot{w}(s, t) &= -\omega^2 W(s) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

式中, ω 为拱的固有频率; $V(s)$ 和 $W(s)$ 分别为拱的径向和切向振型函数。

将上式代入式(2-11),并消去包含 EF 的项,则两式合并为

$$\begin{aligned} & \left[EI_x \left(V'' + \frac{W'}{R} \right) \right]' + \left[\frac{EI_x}{R^2} \left(V' + \frac{W'}{R} \right) \right]' \\ & + m\omega^2 \left(-V + \frac{W}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-32)$$

对于等截面拱,上式简化为

$$\begin{aligned} & EI_x \left(V'' + \frac{W'}{R} \right)'' + \frac{EI_x}{R^2} \left(V' + \frac{W'}{R} \right)' \\ & + m\omega^2 \left(-V + \frac{W}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-33)$$

引入振动时拱轴不伸缩的假定,即令

$$\epsilon = W' - \frac{V}{R} = 0$$

并将由此得到的

$$v = RW'$$

代入式(2-33)消去 $V(s)$, 即得

$$EI_x \left[(RW')'' + \frac{W'}{R} \right]' + \frac{EI_x}{R^2} \left[(RW')'' + \frac{W'}{R} \right]' + m\omega^2 \left[- (RW')' + \frac{W}{R} \right] = 0 \quad (2-34)$$

上式就是等截面拱平面挠曲固有振动的一般方程。

对于 R 为常数的圆弧拱, 由于 $ds = R d\varphi$, 方程(2-34)可写成

$$\frac{d^6 W}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + (1 - \Omega^2) \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \Omega^2 W = 0 \quad (2-35)$$

式中, $\Omega^2 = \frac{m\omega^2 R^4}{EI_x}$, φ 为对应于曲线坐标 s 的圆心角。式(2-35)即是等截面圆弧拱平面挠曲的固有振动方程。

圆弧拱如受有径向外荷载 p 的作用(指向圆心为正向), 则因拱挠曲后曲率的变化而产生了轴向压力 $N = pR$ 的二次影响, 即令式(2-30)中的 p_r 为

$$p_r = - m\ddot{v} - pR(v'' + \frac{w'}{R}) \quad (2-36)$$

同上述化简过程, 得式(2-11)两式合并后的方程为

$$EI_x (V'' + \frac{W'}{R})''' + \frac{EI_x}{R^2} (V'' + \frac{W'}{R})' + pR (V'' + \frac{W'}{R})' + m\omega^2 (-V' + \frac{W}{R}) = 0 \quad (2-37)$$

同样, 代入轴向不可伸缩的条件 $V = RW'$ 消去 V , 得到考虑轴向力二次影响的等截面圆弧拱平面挠曲固有振动方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^6 W}{d\varphi^6} + (2 + \frac{pR^3}{EI_x}) \frac{d^4 W}{d\varphi^4} \\ + (1 + \frac{pR^3}{EI_x} - \Omega^2) \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \Omega^2 W = 0 \end{aligned} \quad (2-38)$$

式中, Ω^2 意义同前。

很显然, 式(2-38)中的 $p = 0$ 即退化为不计轴向力影响的方程

(2-35)。

令 $\nu^2 = 1 + \frac{pR^3}{EI_x}$, 则式(2-38)可改写为

$$\frac{d^6 W}{d\varphi^6} + (1 + \nu^2) \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + (\nu^2 - \Omega^2) \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \Omega^2 W = 0 \quad (2-39)$$

上式的特征方程是

$$n^6 + (1 + \nu^2)n^4 + (\nu^2 - \Omega^2)n^2 + \Omega^2 = 0 \quad (2-40)$$

设 $Z = n^2$ 作变量代换, 上式改写成

$$Z^3 + (1 + \nu^2)Z^2 + (\nu^2 - \Omega^2)Z + \Omega^2 = 0 \quad (2-41)$$

上式具有三个根:

$$Z_1 = n_1^2, \quad Z_2 = n_2^2, \quad Z_3 = n_3^2$$

根据一元三次方程的求解方法, 再利用变量代换

$$Z = x - \frac{1}{3}(1 + \nu^2) \quad (2-42)$$

代入式(2-41), 得到一个新的三次方程

$$x^3 - 3ax + 2b = 0 \quad (2-43)$$

式中

$$a = \frac{(1 + \nu^2)^2}{9} - \frac{\nu^2 - \Omega^2}{3}$$
$$b = \frac{(1 + \nu^2)^3}{27} - \frac{(1 + \nu^2)(\nu^2 - \Omega^2)}{6} + \frac{\Omega^2}{2}$$

三个根中必有一根 x_3 永远是实根, 而其余两个根 x_1 和 x_2 则有以下三种可能情况:

1. $a^3 > b^2$, 则 x_1 与 x_2 为不相等的实根。例如当不计轴力影响时, 令 $p = 0, \nu^2 = 1$, 于是

$$a = \frac{4}{9} - \frac{1 - \Omega^2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{\Omega^2}{3}$$
$$b = \frac{8}{27} - \frac{2(1 - \Omega^2)}{6} + \frac{\Omega^2}{2} = -\frac{1}{27} + \frac{5}{6}\Omega^2$$

可满足 $a^3 > b^2$ 的条件。

2. $a^3 = b^2$, 则有二重实根 $x_1 = x_2$ 。

3. $a^3 < b^2$, 则 x_1 与 x_2 为一对共轭复根, 考虑轴向力影响时就会出现这种情况。

由三个根 x_1, x_2 和 x_3 可求得 z_1, z_2 和 z_3 , 进而得到 n_1, n_2 和 n_3 , 即可写出齐次方程(2-39)的解。

对于不计轴力的第一种情况, 式(2-35)的解为

$$W(\varphi) = A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi + A_2 \cos n_2 \varphi + B_2 \sin n_2 \varphi + A_3 \cos n_3 \varphi + B_3 \sin n_3 \varphi \quad (2-44)$$

式中, n_1, n_2 和 n_3 为特征方程(2-40)中当 $\nu^2 = 1$ 时的三个实根。六个积分常数将由六个边界条件确定。

对于双铰拱, 可写出以下边界条件

当 $\varphi = 0$ 和 2α 时, 有

$$W = 0, \quad W' = V = 0, \quad W'' = V' = 0$$

代入式(2-44)得出关于积分常数的线性齐次方程组。由系数行列式等于零的条件解得 Ω^2 , 并由此可求得圆弧拱的固有频率和相应的振型的精确解。

由上述分析可见, 即使对于最简单的双铰等截面圆弧拱, 并且不考虑轴向力的影响, 精确求解过程已相当繁复, 并且难以得出解析形式的固有频率计算公式。

2.2.2 抛物线拱的平面挠曲固有振动

如图 2-4 所示, 设抛物线拱截面满足 $EF \cos \varphi = EF_c$, $EI_z \cos \varphi = EI_c$ 。拱桥绕着按式(2-14)表示的静力平衡位置 p_0, H_0 和 η_0 作小振幅的固有振动。振动时, 水平推力增加 H , 挠度增加 η , 荷载项则增加惯性力项 $-m\ddot{\eta}$ 。写出上述两种情况下的平衡方程

$$EI_c \eta_0^{(4)} - H_0(y'' - \eta_0'') = p_0$$

$$EI_c(\eta_0 + \eta)^{(4)} - (H_0 + H)(y'' - \eta_0'' - \eta'') = p_0 - m\ddot{\eta}$$

两式相减, 并略去高阶微小量 $H\eta''$ 和 $H\eta'''$, 则得拱桥绕 η_0 作固有振动的动力平衡方程为

$$EI_c \eta^{(4)} + H_0 \eta'' - H \eta'' + m\ddot{\eta} = 0 \quad (2-45)$$

式中, m 为单位水平长度上荷载 p_0 的质量, 包括拱圈、拱上建筑以及桥上载重的全部质量。

由于在式(2-45)推导中略去了非线性项 $H\eta''$, 使得该式线性化, 称为线性二阶理论的运动方程。此时, 振动是简谐的, 即有 $\ddot{\eta} = -\omega_\eta^2(x)\sin\omega t$, 代入式(2-45)后, 得抛物线拱固有振动的基本方程为

$$EI_c \eta^{(4)} + H_0 \eta'' - H \eta'' - m\omega^2 \eta = 0 \quad (2-46)$$

式中“'”表示关于 x 的导数, 水平力增量为

$$H = \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^l \eta(x) dx$$

由此可见, 由于 H 要从 $\eta(x)$ 积出, 上式是一个关于 η 的微分—积分方程。

下面以最简单的双铰拱为例, 讨论抛物线拱桥的固有振动分析过程。

假设拱桥沿全长具有均匀分布的质量 m , 它接近于桥上无车辆荷载的空桥状态或全桥满布荷载时的状态。双铰拱的振型可表示为

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \eta_n(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2-47)$$

它满足拱端 $\eta = \eta' = 0$ 的边界条件。

将上式代入式(2-19), 得

$$\begin{aligned} H &= \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^l \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{EF_c l}{\rho L \pi} \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) \end{aligned} \quad (2-48)$$

将式(2-47)和(2-48)一并代入固有振动方程(2-46), 运用迦辽金法, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^l (EI_c \eta^{(4)} + H_0 \eta'' - H \eta'' - m\omega^2 \eta) \\ &\delta \eta_k(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (2-49)$$

式中, $\delta\eta_k(x) = \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ 。由此可得到两组求系数 $\{\alpha\}$ 的方程。

1. 反对称的振动形式 ($k = 2, 4, \dots$)

由式(2-48), 当取偶数项时, $H = 0$ 。

有

$$(\epsilon_k^2 - \omega_k^2)d_k = 0$$

从而得

$$\omega_k = \epsilon_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_k}{m}} \quad (k = 2, 4, 6, \dots) \quad (2-50)$$

式中, $\nu_k = 1 - \frac{H_0}{k^2 H_E}$ 为二阶理论的影响系数; $H_E = \frac{\pi^2 EI_c}{l^2}$ 为欧拉临界推力。

由此可见, 反对称振动的各阶振型是相互独立的。 $k = 2$ 时为最低的一阶反对称振型, 即

$$\eta(x) = \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (2-51)$$

是反对称两个正弦半波形式的振型。相应的频率为

$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_2}{m}} \quad (2-52)$$

式中, $\nu_2 = 1 - \frac{H_0}{4H_E}$, H_E 同上。

2. 对称的振动形式 ($k = 1, 3, 5, \dots$)

由式(2-48)可知, 此时 $H \neq 0$, 有

$$(\epsilon_k^2 - \omega^2)\alpha_k + \frac{a^2}{k} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{n} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 3, 5, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right) \quad (2-53)$$

式中

$$a^2 = \frac{8EF_c l}{m\pi^2 \rho^2 L}$$

$$\epsilon_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_k}{m}}$$

$$\rho = \frac{l^2}{8f}$$

$$L = l \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]$$

由此可见,对称振动的各阶振型和相应的频率必须从上面的联立方程组中解出。由系数行列式等于零的条件即可得出关于 ω 的频率方程。

实用上一般取 $k = 1, 3$ 和 $n = 1, 3$ 两项计算,由式(2-53)计算求得的 ω_1 和 ω_3 已足够精确,高阶振型的影响很小。此时,由

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_1^2 - \omega^2) \alpha_1 + a^2 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{3} \right) &= 0 \\ (\epsilon_3^2 - \omega^2) \alpha_3 + \frac{a^2}{3} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

得频率方程为

$$\omega^4 - \left(\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2 + \frac{10}{9} a^2 \right) \omega^2 + \left[\epsilon_1^2 \epsilon_3^2 + a^2 \left(\frac{\epsilon_1^2}{9} + \epsilon_3^2 \right) \right] = 0 \quad (2-55)$$

求解上式即可得两个对称振动的圆频率 ω_1 和 ω_3 。将 ω_1 和 ω_3 分别代入式(2-54),即可分别得出 α_1 和 α_3 的对比值,最后由

$$\eta(x) = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \alpha_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

得到相应的两个对称振型。

例 2.2.1 抛物线双铰拱的固有振动分析(图 2-10)。已知

$$l = 60\text{m}, \quad f = 7.5\text{m}$$

$$F_c = 815\text{cm}^2, \quad I_c = 3632000\text{cm}^4$$

$$E = 2.06 \times 10^7 \text{N/cm}^2$$

$$m = 1435.2\text{kg/m}$$

由此算得

$$H_0 = \frac{mgl^2}{8f} = 843.7\text{kN}$$

$$H_E = \frac{\pi^2 EI_c}{l^2} = 20502.9\text{kN}$$

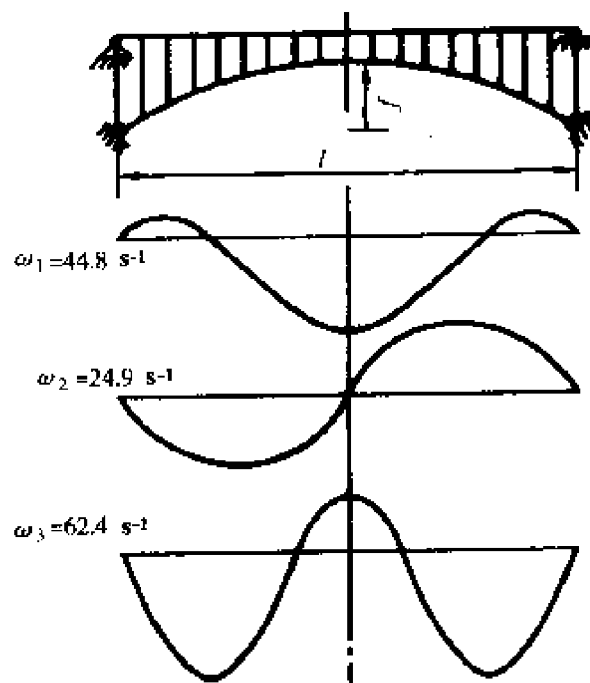


图 2-10 拱桥的振型

$$\nu_1 = 1 - \frac{H_0}{H_E} = 0.959$$

$$\nu_2 = 1 - \frac{H_0}{4H_E} = 0.9897$$

$$\nu_3 = 1 - \frac{H_0}{9H_E} = 0.9954$$

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_1}{m}} = 6.13 \text{ s}^{-1}$$

$$\epsilon_2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_2}{m}} = 24.9 \text{ s}^{-1} \quad \text{即 } \omega_2 = 24.9 \text{ s}^{-1}$$

$$\epsilon_3 = \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_3}{m}} = 56.3 \text{ s}^{-1}$$

$$\rho = \frac{l^2}{8f} = 60 \text{ m}$$

$$L = l \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right] = 65\text{m}$$

$$a^2 = \frac{8EF_c l}{m\pi^2 \rho^2 L} = 2430 \quad 1/s^2$$

代入式(2-55)得频率方程

$$\omega^4 - 5902.6\omega^2 + 7.82 \times 10^6 = 0$$

解之,得

$$\omega_1 = 44.8s^{-1}, \quad \omega_3 = 62.4s^{-1}$$

代入式(2-54),最后得前三个振型为

$$\eta_1(x) = \alpha_1 \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{1.786} \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \quad (\text{对称})$$

$$\eta_2(x) = \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (\text{反对称})$$

$$\eta_3(x) = \alpha_1 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + 1.786 \sin \frac{3\pi x}{l} \right) \quad (\text{对称})$$

从上面的例子可以看出,单拱平面挠曲固有振动的振型序列,按相应的频率从小到大进行排列,一般第一振型总是反对称的。这是因为在反对称振动时,振动引起的附加轴力 $H=0$,阻力较小,固有频率最低。而第二、第三振型一般都是对称的。国内外研究表明,拱的振型序列随矢跨比的减小而发生变化,即第一反对称振型的频率逐渐与第一对称振型的频率(总序列为第二振型)靠拢,当 $\frac{f}{l} \approx 0.08$ 时,两者接近相等。

总之,试验与计算结果都表明,在 $\frac{f}{l} = \frac{1}{12}$ 附近存在一个拱的固有振型序列的转化点,它反映出拱结构向梁的蜕化。这个现象可以双铰拱为例从理论上加以说明。

由式(2-50)得第一反对称振型的频率为

$$\omega_2^2 = \epsilon_2^2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \frac{EI_c \nu_2}{m}$$

由式(2-55),第一阶对称振型的频率 ω_1 可用牛顿法求得其近似值。当 ω^2 的初始值选为 $\epsilon_1^2 + \frac{10}{9}a^2$ 时,得

$$\omega_1^2 = \left(\epsilon_1^2 + \frac{10}{9} a^2 \right) (1 - \delta)$$

式中

$$\delta = \frac{\frac{1}{9}(\epsilon_3^2 - \epsilon_1^2)a^2}{(\epsilon_1^2 + \frac{10}{9}a^2)(\epsilon_3^2 - \epsilon_1^2 - \frac{10}{9}a^2)} \text{ 为修正值。}$$

由 $\omega_1 = \omega_2$ 的条件, 可得

$$\epsilon_2^2 = (\epsilon_1^2 + \frac{10}{9}a^2)(1 - \delta)$$

注意到 ν_1 和 ν_2 相差甚微, 上式进一步简化为

$$4 = \left[1 + \frac{10}{9} \left(\frac{a}{\epsilon_1} \right)^2 \right] (1 - \delta)$$

代入 $a^2 = \frac{8EF_e l}{m\pi^2 \rho^2 L}$, 并且令 $i^2 = \frac{I_c}{F_c}$, 引入 $\rho = \frac{l^2}{8f}$, 得

$$\frac{10}{9} \frac{a^2}{\epsilon_1^2} = \frac{80}{9} \cdot \frac{l^5}{\pi^4 i^2 \rho^2 L} \gg 1$$

最后导得临界矢跨比为

$$\left(\frac{f}{l} \right)_{cr}^2 = \frac{9\pi^4 \left(\frac{i}{l} \right)^2 \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]}{1 - \delta}$$

对于一般的中小跨径拱桥, $\left(\frac{i}{l} \right)^2 \approx 0.0002$, 则得

$$\left(\frac{f}{l} \right)_{cr} = \frac{1}{13.6} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta}} \approx \frac{1}{12} \sim \frac{1}{13}$$

由此可见, 在矢跨比 $\frac{f}{l} = \frac{1}{12}$ 附近确实存在着这一转化点。但工程中一般常见的拱桥, 其 $\frac{f}{l} > \frac{1}{10}$ 。因此它们最低阶固有频率所对应的第一阶振型总是反对称的。

以上的固有振动分析中, 只考虑竖向惯性力 $-m\ddot{\eta}$ 的作用。然而, 对于矢跨比较大的陡拱, 就应当考虑水平惯性力 $-m\ddot{\xi}$ 的影响, 相应的固有振动方程就要复杂得多。李国豪曾在计及水平惯

性力的条件下,演引了抛物线双铰拱的第一阶反对称振型的最低阶频率公式

$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_c \nu_2}{m[1 + 13.8 \left(\frac{f}{l} \right)^2]}} \quad (2-56)$$

其中, $[1 + 13.5 \left(\frac{f}{l} \right)^2]$ 即为水平惯性力的影响, 它使拱的频率减小, $\frac{f}{l}$ 愈大, 降低愈多。例如, 当 $\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1 + 13.5 \left(\frac{f}{l} \right)^2}} = 0.478$, 使频率降低达一倍之多, 是十分可观的, 不可忽视。

2.2.3 拱的平面挠曲固有振动反对称基频的近似计算

从上两小节可以看到, 要精确求解拱的固有振型, 即使对于圆弧拱或抛物线拱这类简单拱轴线形也是很困难的。但是, 拱的固有振动分析是一个特征值问题, 振型的近似性不会给其对应的频率(特征值)带来很大的影响。因此, 下面介绍用瑞莱—李兹法来导引各种不同拱轴线形的反对称最低基频的近似公式。

图 2-11 所示的等截面拱, 其拱轴线形分别为

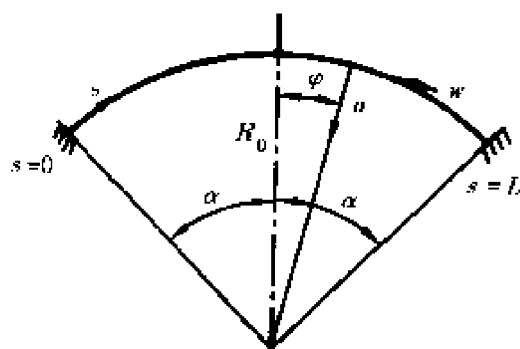


图 2-21

1. 圆弧 $R = R_0$
2. 摆线 $R = R_0 \cos \varphi$

$$3. \text{悬链线} \quad R = \frac{R_0}{\cos^2 \varphi}$$

$$4. \text{抛物线} \quad R = -\frac{R_0}{\cos^3 \varphi}$$

式中, R_0 为拱顶的曲率半径。

拱在平面内振动时的位能为

$$V = \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left(v'' + \frac{w'}{R} \right)^2 ds \quad (2-57a)$$

式中, $v(s, t)$ 、 $w(s, t)$ 分别表示拱轴径向位移和切向位移, L 表示拱弧轴线的全长。

若引入振动时拱轴线不变形的假设, 即令 $\epsilon = w' - \frac{v}{R} = 0$, 则上式可改写成

$$V = \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left(v'' + \frac{v}{R^2} \right)^2 ds \quad (2-57b)$$

拱在平面内振动时的动能为

$$T = \frac{m}{2} \int_0^L (v^2 + w^2) ds \quad (2-58)$$

振动是简谐的, 有

$$\left. \begin{aligned} V(s, t) &= v(s) \sin \omega t \\ W(s, t) &= w(s) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2-59)$$

将上式代入式(2-57b)和式(2-58), 根据瑞莱法原理, 由 $V_{\max} = T_{\max}$, 可得频率计算公式

$$\omega^2 = \frac{EI_x \int_0^L \left[V''(s) + \frac{1}{R^2} V(s) \right]^2 ds}{m \int_0^L [V^2(s) + W^2(s)] ds} \quad (2-60)$$

上式在使用时, 要注意假设的反对称振型函数 $V(s)$ 和 $W(s)$ 之间必须满足 $W' = \frac{V}{R}$ 的拱轴不伸缩条件。

1. 两铰拱的反对称基频计算公式

对于两铰拱, 拱端 $\varphi = \pm \alpha$ (α 为半开角) 要满足 $v = w = 0, M_x$

$= EI_x (V'' + \frac{W''}{R}) = 0$ 。由振动时拱轴不可伸缩的条件 $\epsilon = W' - \frac{V}{R} = 0$ 得

$$W' = 0, \quad v'' = 0$$

由此可假定满足边界条件的反对称近似振型函数

$$\left. \begin{aligned} V(s) &= A \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \\ W(s) &= -A \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left(\cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

将上式代入式(2-60),并注意到 $ds = R d\varphi$,即得基频的计算公式为

$$\omega^2 = \frac{EI_x}{mR_0^4} F(\alpha) \quad (2-62)$$

式中,

$$F(\alpha) = - \frac{R_0^4 \left[1 - \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^2 \int_0^\alpha \frac{1}{R^3} \sin^2 \frac{\pi \varphi}{\alpha} d\varphi}{\int_0^\alpha R \left[\sin^2 \frac{\pi \varphi}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} + 1 \right)^2 \right] d\varphi}$$

对于圆弧拱, $R = R_0 = \text{常数}$,上式简化为

$$\omega^2 = \frac{EI_x}{mR_0^4 \alpha^4} \frac{\alpha^4 - 2\pi^2 \alpha^2 + \pi^4}{1 + \frac{3\alpha^2}{\pi^2}} \quad (2-63)$$

上式可改写成我国桥梁规范中的周期公式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \zeta_T L^2 \sqrt{\frac{m}{EI_x}} \quad (2-64)$$

式中, $L = 2R_0\alpha$ 为拱弧全长; ζ_T 为周期系数

$$\zeta_T = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi^2 + 3\alpha^2}}{\pi^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2 + 3\varphi_0^2}}{4\pi^2 - \varphi_0^2} \quad (2-65)$$

其中, $\varphi_0 = 2\alpha$ 为拱弧全长对应的全开角。

对于 φ_0 较小的坦拱,式(2-63)可改写为

$$\omega = \frac{C}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{m}} \quad (2-66)$$

式中, l 为拱的计算跨径; C 为频率系数

$$C = \frac{4\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\pi^2 - \alpha^2}{\sqrt{1 + 3 \frac{\alpha^2}{\pi^2}}} \quad (2-67)$$

当 $\alpha = 0$ 时, 代入上式得 $C = 4\pi^2$, 则

$$\omega = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{m}}$$

相当于梁的第二阶反对称振型的频率。

根据式(2-62)可算出各种不同拱轴线的 $F(\alpha)$, 并进而换算成式(2-66)的 C 值。图 2-12 表示了它们的 C 值关系。

由图 2-12 可见, 拱轴线形的影响是明显的。同时, 随着 φ_0 的

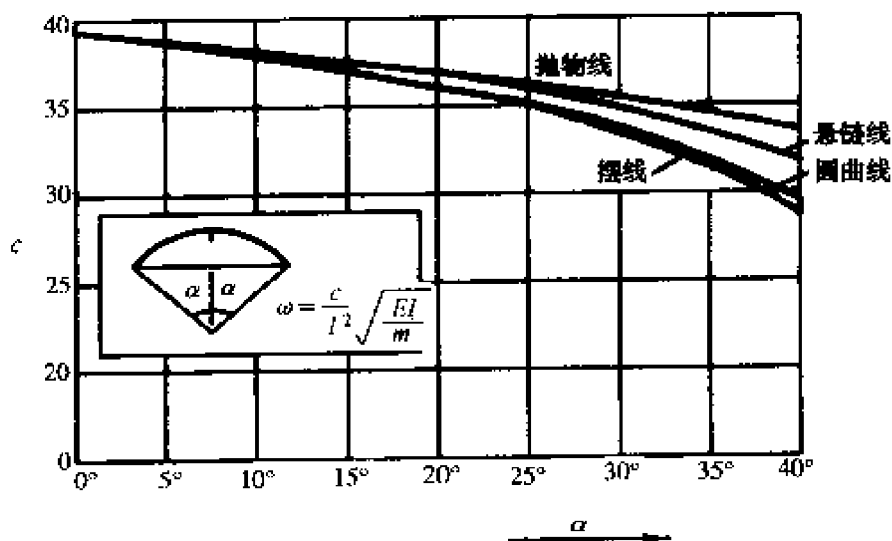


图 2-12 频率系数 C

增大, 即 $\frac{f}{l}$ 的增加, C 值下降, 频率减少, 反映出拱度的影响。 C 值与 ζ_T 的换算式为

$$C = \frac{2\pi}{\zeta_T} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (2-68)$$

或

$$\zeta_T = \frac{2\pi}{C} \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (2-69)$$

对于十分平坦的拱, $C \rightarrow 4\pi^2$, $l \rightarrow L$, $\zeta_T \rightarrow \frac{1}{2\pi} = 0.159$ 。

2. 无铰拱的反对称基频计算公式

对于无铰拱, 振型应满足边界条件

$$\text{当 } \varphi = 0, \varphi_0 \text{ 时, } V = V' = W = 0$$

以及在振动时拱轴不可伸缩条件 $W' - \frac{V}{R} = 0$, 即

$$\text{当 } \varphi = 0, \varphi_0 \text{ 时, } W' = 0$$

由此假定反对称近似振型函数

$$\left. \begin{aligned} V(s) &= A \left[\left(1 - \frac{2s}{L}\right) - 3\left(1 - \frac{2s}{L}\right)^3 + 2\left(1 - \frac{2s}{L}\right)^4 \right] \\ W(s) &= A \frac{L}{2R} \left[\frac{3}{20} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2s}{L}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2s}{L}\right)^4 - \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2s}{L}\right)^5 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-70)$$

上式中 $V(s)$ 仅适应左半个拱弧, 即 $0 \leq s \leq L/2$ 。在 $s = L/2$ 的拱顶处 $V(L/2) = 0$, 利用反对称性即可求得右半个拱弧的表达式。 $W(s)$ 则显然满足 $W' = \frac{V}{R}$ 的条件, 并且在拱顶处有

$$W'(L/2) = V(L/2) = 0$$

因此, $W(s)$ 是左右对称的。

将式(2-70)代入式(2-60)即可求得无铰拱的 $F(\alpha)$, 并换算成周期公式(2-64)中的 ζ_T 。

对于圆弧拱, 可得周期系数

$$\zeta_T = 2\pi \sqrt{\frac{1 + 0.0615\varphi_0^2}{3827 - 91\varphi_0^2 + \varphi_0^4}} \quad (2-71)$$

表 2-1 中列出了双铰和无铰圆弧拱的 ζ_T 和 $\frac{f}{l}$ 之间的关系。

ζ_T 的取值

表 2-1

$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
双铰拱	0.221	0.196	0.183	0.176	0.172	0.169	0.167	0.166
无铰拱	0.126	0.117	0.112	0.109	0.107	0.106	0.105	0.104

2.2.4 拱的侧向弯扭固有振动

拱的侧向弯扭振动是一种空间振动现象。大跨径钢拱桥在重车尤其是拥挤的人群通过桥上时所发生的强烈晃动,或者拱桥在横桥向来的地震波作用下所发生的横向地震振动都是侧向弯扭振动。在本小节中将分析拱的侧向弯曲——扭转固有振动。

由等截面圆弧拱侧向弯曲——扭转的弹性平衡方程(2-29),计入径向的恒截 q 所产生的拱轴力二次影响后,得

$$\left. \begin{aligned} (EI_y + \frac{EI_w}{R^2})u^{(4)} + (N - \frac{GI_d}{R^2})u'' + \frac{EI_w}{R}\theta^{(4)} - \frac{EI_y + GI_d}{R}\theta'' &= p_\zeta \\ EI_w\theta^{(4)} - GI_d\theta'' + \frac{EI_y}{R^2}\theta + \frac{EI_w}{R}u^{(4)} - \frac{EI_y + GI_d}{R}u'' &= m_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-72)$$

式中, u 和 θ 分别为拱的侧向位移和扭转角;“'”表示关于曲线坐标 s 的导数; EI_y 、 EI_w 和 GI_d 分别为拱截面的侧向抗弯刚度、约束扭转刚度和自由扭转刚度; N 为拱轴向压力; p_ζ 和 m_ζ 分别为拱轴的侧向分布荷载和分布扭矩。其中,由径向的恒截 q 在拱扭转时的侧向分量 $q\sin\theta \approx q\theta = \frac{N\theta}{R}$ 正好与原方程(2-29)中的轴力二次项 $N\frac{\theta}{R}$ 相抵消。

引入以下符号

$$B_y = EI_y$$

$$C = GI_d$$

$$D_w = EI_w$$

后,式(2-72)可改写成

$$\left. \begin{aligned} (B_y + \frac{D_w}{R^2})u^{(4)} + (N - \frac{C}{R^2})u'' + \frac{D_w}{R}\theta^{(4)} - \frac{B_y + C}{R}\theta'' &= p_\zeta \\ D_w\theta^{(4)} - C\theta'' + \frac{B_y}{R^2}\theta + \frac{D_w}{R}u^{(4)} - \frac{B_y + C}{R}u'' &= m_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-73)$$

假设拱桥的拱上建筑与拱圈联成整体,而且拱上建筑的刚度或者很小可忽略,或者附加于拱圈上。在计算振动惯性力时必须包括桥面系等拱上建筑的质量。

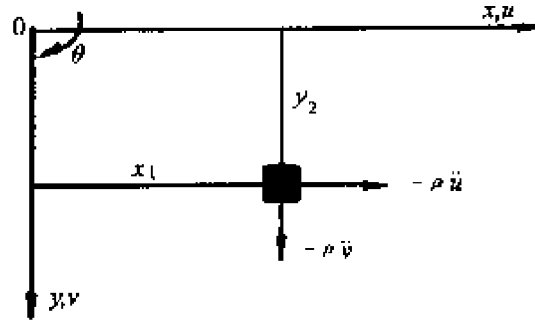


图 2-13

图 2-13 表示以拱截面的扭转中心为原点,并与主轴平行的坐标系。由于拱轴的侧向位移 u ,径向位移 v 和扭转角 θ ,拱与桥面横截面上任一点 (x_1, y_1) 的水平 and 径向位移分别为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u - y_1 \theta \\ v_1 &= v + x_1 \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-74)$$

固有振动时,截面上所有质量的惯性力将形成水平方向的惯性力和绕截面扭转中心的惯性扭矩

$$\left. \begin{aligned} p_x &= - \int_F \ddot{u}_1 d\rho = - \int_F (\ddot{u} - y_1 \ddot{\theta}) d\rho = - \tilde{M} \ddot{u} + S_x \ddot{\theta} \\ m_x &= - \int_F (x_1 \ddot{v}_1 - y_1 \ddot{u}_1) d\rho = - \int_F [x_1 (\ddot{v} + x_1 \ddot{\theta}) - y_1 (\ddot{u} - y_1 \ddot{\theta})] d\rho \\ &= - I_s \ddot{\theta} + S_x \ddot{u} - S_y \ddot{v} \end{aligned} \right\} \quad (2-75)$$

式中, $\tilde{M} = \int_F d\rho$ 为桥横截面的质量和;

$S_x = \int_F y_1 d\rho$ 为桥横截面质量对 x 轴的静力矩;

$S_y = \int_F x_1 d\rho$ 为桥横截面质量对 y 轴的静力矩;

$I_s = \int_F (x_1^2 + y_1^2) d\rho$ 为桥横截面质量对扭转中心的极惯矩。

把上式的惯性力引入方程(2-73),并注意到对于一般截面左

右对称的拱桥,质量分布也是左右对称的,此时有 $S_y = 0$, 则得拱桥侧向弯曲——扭转的固有振动方程为

$$\left. \begin{aligned} (B_y + \frac{D_w}{R^2})u^{(4)} + (N - \frac{C}{R^2})u'' + \frac{D_w}{R}\theta^{(4)} - \frac{B_y + C}{R}\theta'' + \tilde{M}\ddot{u} - S_x\dot{\theta} &= 0 \\ D_w\theta^{(4)} - C\theta'' + \frac{B_y}{R^2}\theta + \frac{D_w}{R}u^{(4)} - \frac{B_y + C}{R}u'' + I_s\ddot{\theta} - S_x\ddot{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-76)$$

对于闭口截面的拱,约束扭转项的作用相对于自由扭转项是微小的,可忽略不计。令 $D_w = 0$, 则上式可进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} B_y u^{(4)} + (N - \frac{C}{R^2})u'' + \frac{B_y + C}{R}\theta'' + \tilde{M}\ddot{u} - S_x\dot{\theta} &= 0 \\ - C\theta'' + \frac{B_y}{R^2}\theta - \frac{B_y + C}{R}u'' + I_s\ddot{\theta} - S_x\ddot{u} &\approx 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-77)$$

上式中未计入阻尼项。由于拱上建筑的高度是沿拱轴变化的,因此,与质量分布有关的 $\tilde{M}$ 、 S_x 和 I_s 都是 s 的函数;与拱的刚度分布有关的 B_y 和 C 一般也是沿拱轴变化的。此外,拱的轴向力 N 也是 s 的函数。因此上式是一个变系数的微分方程组,只能用近似法求解,或用有限元法求数值解。下面介绍用迦辽金法求解方程(2-77)的过程。

拱在发生侧向水平弯曲和扭转的面外振动时,不论拱在面内的支承条件是两端嵌固还是铰支,拱桥在侧向总是可以看成两端嵌固的,同时两端扭转角也等于零,因为两片拱肋总是和支承拱座保持接触。所以,边界条件为

当 $s = 0, L$ 时, $u = 0, u' = 0, \theta = 0$

首先,我们将 $S_x(s)$ 和 $I_s(s)$ 表达为多项圆函数的形式。令

$$\left. \begin{aligned} S_c &= \tilde{M}h_c \\ I_c &= \tilde{M}h_c^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-78)$$

式中, h_c 为选用的适当长度。

选用下列近似的无量纲多项式变化函数

$$\left. \begin{aligned} \mu(s) &= \frac{s_x(s)}{S_c} = \mu_0 - \mu_1 \sin \pi \zeta - \mu_3 \sin 3\pi \zeta \\ \nu(s) &= \frac{I_s(s)}{I_c} = \nu_0 - \nu_1 \sin \pi \zeta - \nu_3 \sin 3\pi \zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-79)$$

要求 $\zeta = \frac{s}{L}$ 在 0, 0.25, 0.5 这三点的近似函数所给出的值 μ 和 ν 分别与实际值相同, 即可解得

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \mu(0) \\ \mu_1 &= 1.207\mu(0) - 0.707\mu(0.25) - 0.5\mu(0.5) \\ \mu_3 &= 0.207\mu(0) - 0.707\mu(0.25) + 0.5\mu(0.5) \end{aligned} \right\} \quad (2-80)$$

ν_0, ν_1 和 ν_3 与实际值 $\nu(0), \nu(0.25)$ 和 $\nu(0.5)$ 的关系式参照上式。

L 是拱轴弧段全长。

1. 对称固有振动

满足边界条件的对称近似振型函数取为

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) &= h_c \alpha_1 (1 - \cos 2\pi \zeta) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \\ \theta(s, t) &= \theta_1 \sin \pi \zeta (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2-81)$$

将上式代入固有振动方程(2-77), 约掉时间函数后, 左边将不恒为零。由迦辽金法原理, 使这二个方程左边的误差(残值) E_a 和 E_b 在以振型为可能位移 δg_a 和 δg_b 上所作的功在全桥上的总和等于零, 即

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L E_a \delta g_a ds &= \int_0^L E_a (1 - \cos 2\pi \zeta) d\zeta = 0 \\ \int_0^L E_b \delta g_b ds &= \int_0^L E_b \sin \pi \zeta d\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

由此可得出关于系数 α_1 和 θ_1 的两个齐次方程组。如果取更多的近似函数来描述固有振型, 则分别用各项近似函数作为可能位移, 可得到和参数数目相同的齐次方程组。

展开式(2-82), 得

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \Omega^2 b_{11} & a_{12} - \Omega^2 b_{12} \\ a_{21} - \Omega^2 b_{21} & a_{22} - \Omega^2 b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-83)$$

式中,

$$a_{11} = 1 - \frac{N_c L^2}{4\pi^2 B_y}, N_c = N - \frac{C}{R^2}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{L^2}{3\pi^2 R h_c} \left(1 + \frac{C}{B_y}\right)$$

$$a_{22} = \frac{L^4}{16\pi^4 R^2 h_c^2} + \frac{L^2}{16\pi^2 h_c^2} \frac{C}{B_y}$$

$$b_{11} = 1$$

$$b_{12} = b_{21} = -\frac{16}{9\pi}\mu_0 + \frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_3}{6}$$

$$b_{22} = \frac{\nu_0}{3} - \frac{8}{9\pi}\nu_1 + \frac{8}{45\pi}\nu_3$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_y^2}, \quad \text{或 } \omega = \omega_y \Omega$$

$$\omega_y = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}L^2} \sqrt{\frac{B_y}{\tilde{M}}}, \text{ 相当于两端嵌固梁的最低阶固有频率 } \omega_1,$$

其中系数 $\frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}$ 比精确值 $(4.730)^2$ 仅大 1.6%。可见 $\alpha_1(1 - \cos 2\pi\zeta)$ 是一个良好的近似函数。

上式中的各系数都是无量纲的。

由式(2-83)的系数行列式等于零,可得频率方程。

$$C_2 \Omega^4 - C_1 \Omega^2 + C_0 = 0 \quad (2-84)$$

式中,

$$C_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$C_1 = a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - 2a_{12}b_{12}$$

$$C_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$$

这样求得两个频率,较小的 Ω_1^2 是一个良好的近似值,较大的 Ω_2^2 误差大些。将 Ω_1^2 和 Ω_2^2 代回式(2-83),即得到相应的振型

中两个参数 α_1 与 θ_1 的比例关系。

2. 反对称固有振动

满足边界条件的反对称近似固有振型函数可取为幂函数形式

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) &= h_c \alpha_2 (\zeta_1 - 8\zeta_1^3 + 16\zeta_1^5) (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \\ \theta(s, t) &= \theta_2 \sin 2\pi \zeta_1 (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2-85)$$

式中, $\zeta_1 = \zeta - \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{s}{L}$ 。

与对称固有振动方法相同, 可求得关于 α_2 和 θ_2 的齐次方程和频率方程, 形式与式(2-83)完全相同, 仅其中的系数改为

$$a_{11} = 1 - \frac{N_c L^2}{90 B_y}, \quad N_c = N - \frac{C}{R^2}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{16 L^2}{221 R h_c} \left(1 + \frac{C}{B_y}\right)$$

$$a_{22} = \frac{7 L^4}{512 R^2 h c^2} + \frac{7 \pi^2 L^2}{128 h c^2} \frac{C}{B_y}$$

$$b_{11} = 1$$

$$b_{12} = b_{21} = -\frac{22}{3} \mu_0 + \frac{94}{10} \mu_1 - \frac{51}{5} \mu_3$$

$$b_{22} = 54 \nu_0 - 44 \nu_1 - 41 \nu_3$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_y^2}$$

$$\overline{\omega}_y = \frac{62.93}{L^2} \sqrt{\frac{B_y}{\tilde{M}}}, \text{ 相当于两端嵌固梁的反对称最低固有频率,}$$

这里的系数 62.93 比精确值大 2%。

由此可求得两个频率及其相应的振型中 α_2 和 θ_2 的比例关系。

例 2.2.2 已知抛物线型固端钢拱桥如图 2-14 所示。其基本

数据如下：

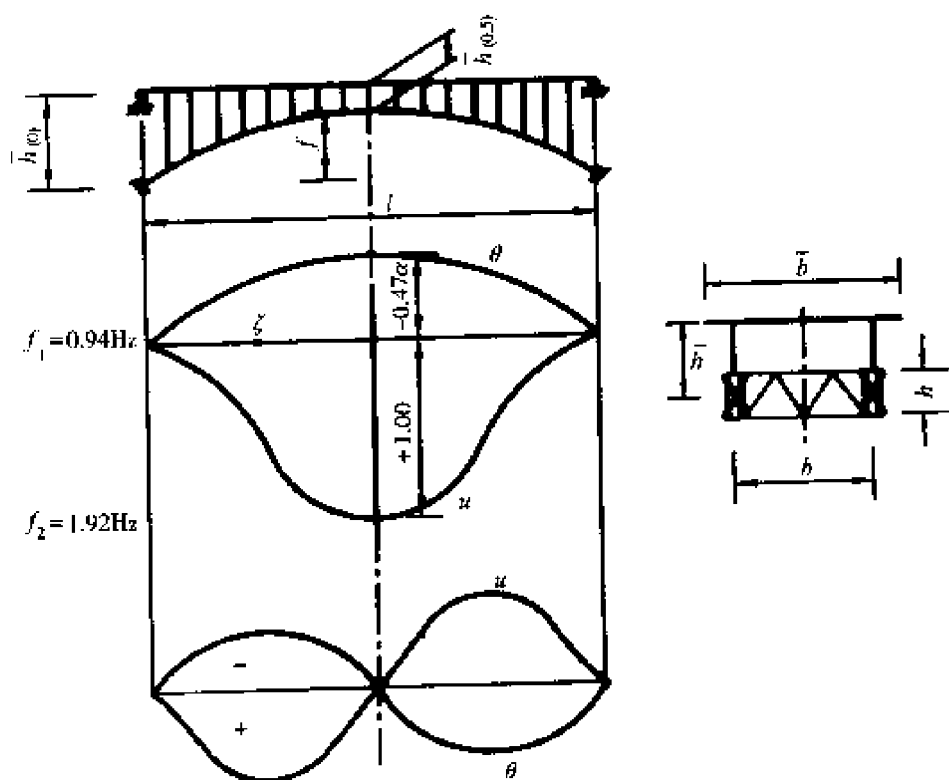


图 2-14 拱的侧向弯扭振型

跨径 $l = 180\text{m}$

矢高 $f = \frac{l}{8} = 22.5\text{m}$

当量曲率半径 $R = -\frac{1 + 4(\frac{f}{l})^2}{8 \frac{f}{l}} \cdot l = 191.25\text{m}$

拱端立柱高度 $\bar{h}(0) = 23.45\text{m}$

跨中立柱高度 $\bar{h}(0.5) = 1.85\text{m}$

拱肋高度 $h = 2.7\text{m}$

拱肋中心距 $b = 8\text{m}$

桥面宽度 $\bar{b} = 11.5\text{m}$

全桥分布恒载 $g = 90.45\text{kN/m}$

全桥分布质量 $\tilde{M} = 9.22\text{t/m}$

拱肋竖向抗弯刚度 $B_x = 0.311(\text{m}^4) \cdot E$

拱顶处的拱肋截面积 $A_c = 0.272\text{m}^2$

拱肋横向抗弯刚度 $B_y = 3.80(\text{m}^4) \cdot E$

拱肋抗扭刚度 $C = 0.08(\text{m}^4) \cdot E$

拱桥恒载水平推力 $H_g = 17118.5\text{kN}$

选用比例高度 $h_c = \frac{R}{30} = 6.375\text{m}$

由式(2-79)算得 $\mu(s)$ 和 $\nu(s)$, 进而由式(2-80)得出

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_3 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.900 & -2.745 & -0.074 \\ 10.950 & 12.048 & 1.477 \end{bmatrix}$$

按式(2-84)的频率方程解出对称的侧向弯扭的固有频率和相应的振型。同理,可求得反对称的频率和振型。结果示于图 2-14 中。

2.3 拱桥的车辆强迫振动

2.3.1 匀速移动的简谐力的作用

如图 2-15 所示为抛物线双铰拱,受到匀速移动的简谐力 $F_1 \cos \Omega_p t$ 的作用。计入拱桥的粘性阻尼的影响,按式(2-45)的形式,拱桥的强迫振动方程可写成

$$EI_c \eta^{(4)} + H_0 \eta'' - Hy'' + 2\beta m \dot{\eta} + m \ddot{\eta} = p(x, t) \quad (2-86)$$

式中, $p(x, t)$ 为沿拱桥跨径方向分布的激励力; $2\beta m \dot{\eta}$ 为粘性阻尼力项; 振动产生的拱水平力增量

$$H = \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^1 \eta dx$$

由梁桥的车辆强迫振分析可知,

$$p(x, t) = F_1 \cos \Omega_p t \delta(x - vt)$$

式中, $\delta(x - vt)$ 为狄拉克函数。

采用级数解法。令

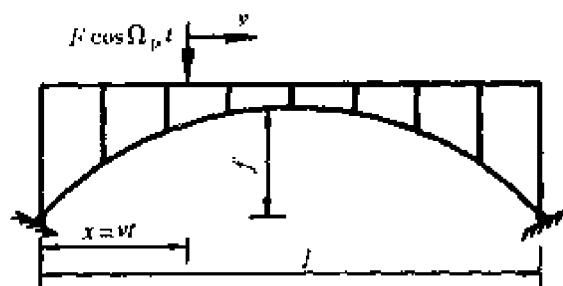


图 2-15 匀速移动简谐力的作用模型

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2-87)$$

式中, $q_n(t)$ 为待求的时间函数。

将式(2-87)代入式(2-86), 其中

$$\begin{aligned} H &= \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^l \eta dx \\ &= \frac{EF_c}{\rho L} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{EF_c l}{\rho L \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) q_n(t) \end{aligned} \quad (2-88)$$

利用三角级数的正交性, 可得关于 $q_n(t)$ 的常微分方程组。它可以分解为对称振动 ($n = 1, 3, 5, \dots$) 和反对称振动 ($n = 2, 4, 6, \dots$) 两组。

如前所述, 拱桥的第一阶振型一般是反对称的。因而这里仅讨论反对称振动的情形。

由式(2-88), 当 $n = 2, 4, 6, \dots$ 时, $H = 0$ 。将(2-87)代式(2-86), 两边同乘 $\sin \frac{n\pi x}{l}$, 并对 x 自 0 到 l 积分, 得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \varepsilon_n \dot{q}_n(t) + \varepsilon_n^2 q_n(t) &= \frac{2F_1}{ml} \cos \Omega_p t \sin \Omega_n t \\ &= \frac{F_1}{ml} [\sin(\Omega_n - \Omega_p)t + \sin(\Omega_n + \Omega_p)t] \\ (n &= 2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (2-89)$$

式中,

$$\epsilon_n^2 = \frac{EI_c}{m} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - \frac{H_0}{m} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{EI_c}{m} \nu_n = \omega_n^2;$$

$$\nu_n = 1 - \frac{H_0}{n^2 H_E};$$

$$H_E = \frac{\pi^2 EI_c}{l^2};$$

$$\Omega_n = \frac{n\pi\nu}{l};$$

$$\zeta_n = \beta/\epsilon_n.$$

方程(2-89)的稳态解为

$$q_n(t) = \frac{F_1}{ml} \frac{1}{\epsilon_n^2} \left\{ \frac{\sin[(\Omega_n - \Omega_p)t + \theta_1]}{\sqrt{[1 - \left(\frac{\Omega_n - \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2]^2 + 4\zeta_n^2 \left(\frac{\Omega_n - \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2}} + \frac{\sin[(\Omega_n + \Omega_p)t + \theta_2]}{\sqrt{[1 - \left(\frac{\Omega_n + \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2]^2 + 4\zeta_n^2 \left(\frac{\Omega_n + \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2}} \right\} \quad (2-90)$$

式中,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = - \frac{2\zeta_n \frac{\Omega_n - \Omega_p}{\epsilon_n}}{1 - \left(\frac{\Omega_n - \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = - \frac{2\zeta_n \frac{\Omega_n + \Omega_p}{\epsilon_n}}{1 - \left(\frac{\Omega_n + \Omega_p}{\epsilon_n}\right)^2}$$

对于 $\Omega_n \ll \Omega_p$, $\omega_2 = \Omega_p$ 时, 拱将发生共振。取 $n=2$, 式(2-90)可以简化为

$$q_2(t) = \frac{2F_1}{ml} \frac{1}{\omega_2^2} \frac{1}{4\zeta_2} \{ \sin[(\Omega_2 - \Omega_p)t + \theta_1] + \sin[(\Omega_2 + \Omega_p)t + \theta_2] \} \quad (2-91)$$

上式可能得到的最大值是正弦函数取值为 1, 所以有

$$q_{2\max} = \frac{2F_1}{m\omega_2^2} \frac{1}{4\zeta_2} \quad (2-92)$$

因为 $n=2$ 表示第一阶反对称基频的振型, 所以把移动荷载 $F_1 \cos \Omega_p t$ 所引起的拱桥 1/4 点处的最大动挠度 $\eta_{\text{dyn}}(l/4)$ 和将荷载幅值 F_1 作用在 1/4 点引起的静挠度 $\eta_{\text{st}}(l/4)$ 之比作为荷载动力作用的尺度。由方程(2-14), 在拱截面满足 $El_c = El \cos \varphi$, $EF_c = EF \cos \varphi$ 条件下写为

$$El_c \eta_s^{(4)} + H_0 \eta_s'' - H_0 y'' = p_s(x) \quad (2-93)$$

和

$$H_0 = \frac{EF_c}{\rho L} \int_0^l \eta_s dx$$

当 F_1 静态作用于 1/4 点时, 有

$$p_s(x) = F_1 \delta(x - \frac{l}{4})$$

代入式(2-93), 并引用级数解法, 即令

$$\eta_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2-94)$$

代入式(2-93)后, 根据迦辽金法原理, 可得关于 α_n 的线性方程组。

相应于振动时的反对称一阶振型, 这里仅取一项, 即

$$\eta_s(x) = \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \quad (2-95)$$

代入式(2-93)并应用迦辽金法, 有

$$\int_0^l \left\{ \alpha_2 \left[EI \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - H_0 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{2\pi x}{l} \right. \\ \left. + H_0 \frac{8f}{l^2} - F_1 \delta(x - \frac{l}{4}) \right\} \sin \frac{2\pi x}{l} dx = 0$$

上式中分别积分, 整理得

$$\alpha_2 = \frac{2F_1}{l \left[EI \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 - H_0 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \right]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{2F_1}{ml}}{\left[EI\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 - H_0\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \right] / m} \\
 &= \frac{2F_1}{ml} \cdot \frac{1}{\omega_2^2}
 \end{aligned} \tag{2-96}$$

所以,有

$$\eta_s(l/4) = a_2 = \frac{2F_1}{ml} \cdot \frac{1}{\omega_2^2} \tag{2-97}$$

又由式(2-87)和式(2-92),可得

$$\eta_{\text{dyn}}(l/4) = \eta_s\left(\frac{l}{4}\right) \cdot \frac{1}{4\zeta_2}$$

因此,可得动力放大系数为

$$\mu_d = \frac{\eta_{\text{dyn}}\left(\frac{l}{4}\right)}{\eta_s\left(\frac{l}{4}\right)} = \frac{1}{4\zeta_2} \tag{2-98}$$

由此可见,两铰拱桥的基频动力放大系数与简支梁桥相同。

2.3.2 匀速移动双轴汽车荷载的作用

如图 2-16 所示为抛物线双铰拱,受到一匀速移动的弹簧—质

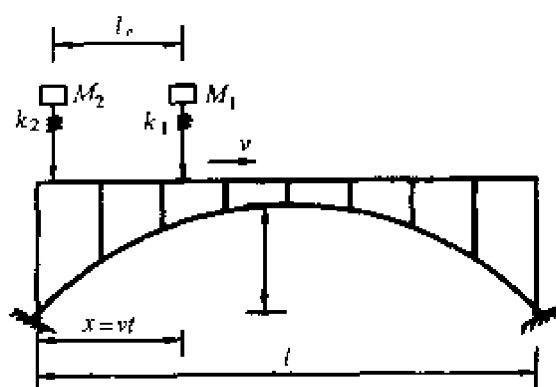


图 2-16 匀速移动双轴汽车的作用模型

量系统的作用。与梁桥类似,它就是双轴汽车的简化模型。由于弹簧系统的变形远远大于拱圈的挠度,故采用简谐力作用形式

$$F(t) = Mg + kA \cos(\Omega_p t + \alpha) \quad (2-99)$$

式中, $\Omega^2 = \frac{k}{M}$ 为汽车弹簧——质量系统的固有频率; A 则取决于汽车上桥时悬挂系统质量的竖向初始条件。相应的激励力为

$$p(x, t) = F(t)\delta(x - vt) = [Mg + kA \cos(\Omega_p t + \alpha)]\delta(x - vt)$$

式中, $\delta(x - vt)$ 为狄拉克函数。

采用级数解法。令

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2-100)$$

代入式(2-86),并注意到式(2-88),两边同乘 $\sin \frac{i\pi x}{l}$ 对 x 自 0 到 l 积分,得反对称强迫振动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \epsilon_n \dot{q}_n(t) + \epsilon_n^2 q_n(t) &= \frac{2}{ml} [Mg + kA \cos(\Omega_p t + \alpha)] \sin \Omega_n t \\ &= \frac{2Mg}{ml} \sin \Omega_n t + \frac{kA}{ml} \sin[(\Omega_n - \Omega_p)t - \alpha] \\ &\quad + \frac{kA}{ml} \sin[(\Omega_n + \Omega_p)t + \alpha] \\ (n &= 2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (2-101)$$

式中各量的含义同上一小节。

由单自由度振动理论容易写出上述方程的解,可参考梁桥的车辆振动一节。

根据汽车试验,大部分载重汽车的悬挂系统竖向振动频率 $f_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = 2 \sim 4 H_z$, 相比之下与拱桥的反对称基频对应的广义扰动频率 $f_{v_2} = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{2\pi v}{2\pi l} = \frac{v}{l}$, 按目前的汽车行驶速度 $v = 100 \text{ km/h} = 27.78 \text{ m/s}$ 计算, f_{v_2} 将随着拱桥的计算跨径的增大而减小。因此,式(2-101)的解中可略去 Ω_2/ω_2 和 Ω_2/Ω_p 项的影响。

对于多辆双轴汽车匀速过桥的情况,用与梁桥相同的分析方

法,分时段叠加求解拱桥的动力响应。

当然,这里忽略了拱上建筑的间接传力作用,而是假设移动的汽车荷载直接作用到拱圈上,与静活载内力分析相似。

2.4 拱桥的弯扭强迫振动

对于大跨径拱桥,当桥宽较小、矢高较大时,在重车尤其是拥挤的人群通过桥上时,可能会发生人感不适的晃动,即一种空间弯扭强迫振动现象。

将动力荷载 $q_z(s, t)$ 、 $q_r(s, t)$ 、和 $m_z(s, t)$ 分别引入圆弧拱的侧向弯曲、扭转和径向平面挠曲的固有振动方程中的右端,并忽略在闭口截面中影响不大的约束扭转作用,就得到拱的空间强迫振动方程为

$$\left. \begin{aligned} B_y u^{(4)} + \left(N - \frac{C}{R^2}\right) u'' - \frac{B_y + C}{R} \theta'' + \tilde{M} \ddot{u} - S_x \dot{\theta} &= p_r(s, t) \\ - C \theta'' + \frac{B_y}{R^2} \theta - \frac{B_y + C}{R} u'' + I_s \ddot{\theta} - S_x \ddot{u} + S_y \ddot{v} &= m_z(s, t) \\ B_x v^{(4)} + N v'' + \frac{N_p}{R} + \tilde{M} \ddot{v} + S_y \dot{\theta} &= p_r(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-102)$$

式中, $N_p = \frac{EA}{RL} \int_0^l v ds$, 为径向荷载 p_r 产生的拱轴压力。

从上式可以看出,即使拱桥的横截面是左右对称的,但只要其质量分布左右不对称,例如人群质量分布不对称,则 $S_y \neq 0$, 竖平面内的径向振动 v 将和扭转振动 θ 发生耦合。并且由于拱桥截面质量对 x 轴的静力矩 $S_x \neq 0$, 使侧向挠曲振动 u 和扭转振动 θ 也耦合在一起,造成一种空间弯扭的耦合振动状态。

用振型分析法求解这种共振现象。参照第 2.2 节中的固有振动分析,固有振动解函数可写成空间振型函数 $g_i(s)$ 的形式,即

对称侧向弯扭振动

$$u(s, t) = g_1(s)(A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

$$\theta(s, t) = g_3(s)(A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

反对称侧向弯扭振动

$$u(s, t) = g_2(s)(A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

$$\theta(s, t) = g_4(s)(A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

平面内径向弯曲振动

$$v(s, t) = [g_5(s) + g_6(s)](A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

现在选用上列各近似振型函数 $g_i(s)$ 与时间函数 $q_i(t)$ 的乘积 $g_i(s)q_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) 作为由动荷载 $p_\zeta(s, t)$ 、 $p_r(s, t)$ 和 $m_\zeta(s, t)$ 引起的强迫振动解。例如, 取

$$\left. \begin{aligned} u(s, t) &= g_1(s)q_1(t) + g_2(s)q_2(t) \\ \theta(s, t) &= g_3(s)q_3(t) + g_4(s)q_4(t) \\ v(s, t) &= g_5(s)q_5(t) + g_6(s)q_6(t) + g_7(s)q_7(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-103)$$

式中,

$$g_1(s) = 1 - \cos 2\pi\zeta, \zeta = \frac{s}{L}$$

$$g_2(s) = (\zeta_1 + 8\zeta_1^3 + 16\zeta_1^5), \zeta_1 = \zeta - \frac{1}{2}$$

$$g_3(s) = \sin \pi\zeta$$

$$g_4(s) = \sin 2\pi\zeta$$

$$g_5(s) = g_1(s)$$

$$g_6(s) = 1 - \cos 4\pi\zeta$$

$$g_7(s) = g_2(s)$$

$q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) 为待求的时间函数

L 为拱的弧长。

把式(2-103)代入式(2-102), 并按迦辽金法原理, 用 $g_i(s)$ 作为可能位移沿拱弧全长积分。为计算方便起见, 除以一个任意选用的弹性常数 k , 则得到关于 $g_i(t)$ 的微分方程组, 用矩阵形式写成

$$\left([A] + \frac{1}{\omega_c^2} [B] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{q_i(t)\} = \{p_i^*(t)\} \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (2-104)$$

式中,

$$\omega_c^2 = \frac{K}{\tilde{M}}$$

$$p_i^*(t) = \frac{1}{k} \int_0^L p(s, t) g_i(s) ds$$

$$p(s, t) = \begin{cases} P_\zeta(s, t) \\ m_\zeta(s, t) \\ p_r(s, t) \end{cases}$$

[A]和[B]中的与侧向弯曲和扭转相应的 a_{ij} 和 b_{ij} 参见第 2.2.4 小节。与径向荷载 $p_r(s, t)$ 相应的系数为

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a_{12} + 1 - \epsilon_1, & \epsilon_1 &= \frac{NL^2}{4\pi^2 B_x} \\ a_{22} &= a_{12} + 16 - 4\epsilon_1 \\ a_{12} &= \frac{L^4}{8\pi^4 B_x} \frac{EA}{R^2} \\ b_{11} &= b_{22} = 1 \\ b_{21} &= b_{12} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (2-105)$$

由于结构是左右对称的,如果忽略人群活载质量分布的可能不对称性, $S_y = 0$, 则径向挠曲振动将和侧向弯曲扭转振动分开,形成两组独立的强迫振动方程。

现在把强迫振动分解为按固有振型函数的振动分量,然后由叠加这些分量去求解。每个这样的强迫振动分量都是独立的,不仅容易求解,而且便于就各个强迫振动分量来分析共振问题。

令

$$\{q_i(t)\} = [C] \{\eta_i(t)\} \quad (2-106)$$

式中, $[C]$ 为固有振型参数矩阵。例如,对于侧向弯扭的对称固有振动,按式(2-83),固有频率 Ω_1^2 和 Ω_2^2 所属的振型参数矩阵为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & - (a_{12} - \Omega_2^2 b_{12}) / (a_{11} - \Omega_2^2 b_{11}) \\ - (a_{11} - \Omega_1^2 b_{11}) / (a_{12} - \Omega_1^2 b_{12}) & 1 \end{bmatrix}$$

将上式代入式(2-104), 则得

$$\left([A][C] + \frac{1}{\omega_c^2} [B][C] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \{ \eta_i(t) \} = \{ p_i^*(t) \} \quad (2-107)$$

注意在固有振动中存在下列关系

$$[A][C] - \frac{1}{\omega_c^2} [B][C][\omega^2] = 0 \quad (2-108)$$

式中

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

将式(2-108)代入式(2-107), 则得

$$\{ \ddot{\eta} \} + [\omega^2] \{ \eta \} = \omega_c^2 \{ N \} \quad (2-110)$$

式中

$$\{ N \} = ([B][C])^{-1} \{ p^* \} = [\beta] \{ p^* \} \quad (2-111)$$

由式(2-109), 上式可改写为

$$\ddot{\eta}_k(t) + \omega_k^2 \eta_k(t) = \omega_c^2 N_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, 7) \quad (2-112)$$

式中

$$N_k(t) = \sum_{i=1}^7 \beta_{ki} p_i^*(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, 7)$$

这样, 联立的微分方程组(2-107)就变换成按各个振型独立的微分方程式(2-112)。

分析强迫振动必须考虑阻尼的作用, 尤其是对于强迫共振, 上式补充阻尼项后写成

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k(t) + \omega_k^2 \eta_k(t) = \omega_c^2 N_k(t) \quad (2-113)$$

其中, ζ_k 为 k 阶阻尼比。

上式相当于一个单自由度体系在 $N_k(t)$ 作用下的强迫振动问题。设动荷载为

$$N_k(t) = N_k \sin \omega_k t$$

即扰动频率等于固有频率而发生共振时,方程(2-113)的解为

$$\eta_k(t) = -\frac{N_k \omega_c^2}{2\zeta_k \omega_k^2} (1 - e^{-\zeta_k \omega_k t}) \cos \omega_k t \quad (2-114)$$

式中,忽略了相对于 $e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k t$ 微小得多的 $\zeta_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k t$ 。

按式(2-112),当 N_k 为静力时,则 $\ddot{\eta}_k = 0$, 静力变位为

$$\eta_{k0} = \frac{\omega_c^2}{\omega_k^2} N_k \quad (2-115)$$

由式(2-114),当 $\cos \omega_k t = 1, e^{-\zeta_k \omega_k t} \rightarrow 0$ 时的最大动力位移为

$$\eta_{k\text{dyn}} = \frac{N_k \omega_c^2}{2\zeta_k \omega_k^2} \quad (2-116)$$

最大动力系数为

$$\mu_d = \frac{\eta_{k\text{dyn}}}{\eta_{k0}} = \frac{1}{2\zeta_k} \quad (2-117)$$

由求得的 $\eta_k(t)$, 按式(2-106)可得 $q_i(t)$, 进而再按式(2-103)算出强迫共振时的振动位移 $u(s, t)$, $\theta(s, t)$ 和 $v(s, t)$ 。

第三章 悬索桥振动

悬索桥是以钢缆索作为主要承重部件的柔性悬吊结构体系,桥道加劲梁通过竖直或斜置的吊索挂在下垂的主索上。悬索桥的固有振动特性首先是指结构总体的动力特性,其时可把悬索(主索)和吊索视为一个受有轴向拉力的杆单元(或称为索单元)。其次是吊索还有一个自身的局部振动问题,这些将在第四章的第4.1节中介绍。

悬索桥和拱桥一样,都是有水平力的体系,它们的平衡方程和振动方程是相似的,区别只在于拱桥的水平力为压力,而悬索桥的水平力则为拉力,方程中含有水平力的项相差一个符号。悬索桥的刚度较小,一般主要用于公路桥梁。

悬索桥在侧向风荷载作用下除了保证足够的静力抗风强度外,还要特别注意像1940年Tacoma悬索桥风毁那样的弯扭耦合颤振现象。因此,悬索桥的扭转振动特性研究尤其重要。

3.1 悬索桥的平面弯曲固有振动

3.1.1 静力平衡方程

如图3-1所示为单跨悬索桥。假设加劲梁为等截面,而且不承担恒载,全部恒载均由主索承担,则在恒载 g 作用下,主索在平衡位置的方程为

$$H_g y'' = -g \quad (3-1)$$

式中, H_g 为主索的恒载水平拉力。此时,加劲梁不产生变形。

活载 $p(x)$ 作用于桥面上时,将由主索和加劲梁共同承受。相

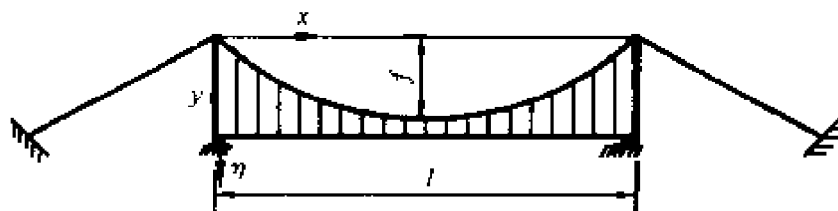


图 3-1 单跨悬索桥

应的加劲梁的弹性平衡方程为

$$EI\eta^{(4)} = p(x) - r(x) \quad (3-2)$$

式中, $r(x)$ 为在活载作用下主索和加劲梁之间经由吊索传递的相互作用力。主索的弹性平衡方程为

$$(H_g + H_p)(y + \eta)'' = -g - r \quad (3-3)$$

将式(3-3)代入式(3-2), 得

$$\begin{aligned} EI\eta^{(4)} &= p(x) + (H_g + H_p)(y'' + \eta'') + g \\ &= p(x) + H_g y'' + H_p y'' + H\eta'' + g \end{aligned} \quad (3-4)$$

注意到式(3-1), 上式可进一步简化为

$$EI\eta^{(4)} - H\eta'' = p(x) + H_p y'' \quad (3-5)$$

式中, $H = H_g + H_p$ 为恒载 g 及活载 $p(x)$ 产生的主索中的水平总拉力; H_p 为活载产生的主索中的水平拉力增量; $H_p y''$ 一项表示主索中的活载水平拉力 H_p 所产生的竖向分布荷载。

按式(3-5), 可以把加劲梁看成是一根不悬挂于主索的简支梁, 同时承受着轴向拉力 H , 竖向荷载 $p(x)$ 和 $y''H_p$ 的作用。恒载 $g(x)$ 沿全桥跨接近相同, 因此, 由式(3-1)可知, 一般用二次抛物线作为主索索形, 即

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$$

和

$$H_g = -\frac{g}{y''} = \frac{gl^2}{8f}$$

式中, l 为加劲梁的计算跨径, 接近于悬索桥主跨径; f 为悬索的跨

中垂度。

式(3-5)是挠度理论的第一个基本方程,其中 η 和 H_p 均是未知数,必须再增加一个条件才能求解。于此可以有两种基本不同的方法。其一是以能量守恒定律为基础,即外力所做的功应等于内力所做的功;另一个则以几何条件为基础,即缆索两端锚固点之间伸长的水平投影应等于零。这两种方法结果相差甚微。这里仅介绍后一种方法。

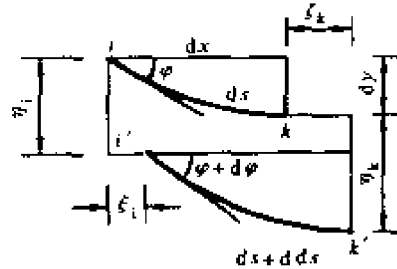


图 3-2

图 3-2 表示一段主索 ds 的位移情况。可以建立以下的关系

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\begin{aligned} (ds + \Delta ds)^2 &= (dx + \xi_k - \xi_i)^2 + (dy + \eta_k - \eta_i)^2 \\ &= (dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2 \end{aligned}$$

两式相减,并略去高次微量 $(\Delta ds)^2$, $(d\xi)^2$ 和 $(d\eta)^2$, 则得

$$ds \cdot \Delta ds = dx d\xi + dy d\eta \quad (3-6)$$

由此可得

$$d\xi = \Delta dl = \frac{ds}{dx} \Delta ds - \frac{dy}{dx} d\eta \quad (3-7)$$

式中, Δds 为主索的伸长量。由于拉力 T 及温度变化 t 产生的伸长为

$$\Delta ds = \frac{T}{E_c A_c} ds \pm \alpha_t t ds = \frac{H_p}{E_c A_c \cos \varphi} ds \pm \alpha_t t ds \quad (3-8)$$

式中, $E_c A_c$ 为主索的抗拉刚度; α_t 为温度膨胀系数。

将式(3-8)和 $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$ 代入式(3-7), 即

$$\Delta dl = \frac{H_p}{E_c A_c \cos^3 \varphi} dx \pm \frac{\alpha_t t}{\cos^2 \varphi} dx - \frac{dy}{dx} d\eta \quad (3-9)$$

鉴于主索在两端锚固点之间伸长的水平投影应等于零,故

$$\Delta l = \frac{H_p}{E_c A_c} \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi} \pm \alpha_1 t \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi} - \int \frac{dy}{dx} d\eta = 0 \quad (3-10)$$

式中第一项和第二项积分沿全主索水平投影长度积分;最后一项只对加劲梁长积分,由分部积分法,此项可转化为

$$\int_0^l y' d\eta = [y'\eta]_0^l - \int_0^l y''\eta dx = - \int_0^l y''\eta dx \quad (3-11)$$

式中,引用了加劲梁的边界条件 $\eta(0) = \eta(l) = 0$ 。将式(3-11)代入式(3-10),得求解 η 和 H_p 的第二个基本方程为

$$\frac{H_p}{E_c A_c} L_s \pm \alpha_1 t L_t + y'' F_n = 0 \quad (3-12)$$

式中, $L_s = \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi}$

$$L_t = \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi}$$

$F_n = \int_0^l \eta dx$, 即为加劲梁在一跨内的挠度面积。

如略去温度变化的影响,并代入 $y'' = -\frac{8f}{l^2}$,则上式可简化为

$$H_p = \frac{8f}{l^2} \frac{1}{\Delta L} F_n \quad (3-13)$$

式中, $\Delta L = \frac{1}{E_c A_c} \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi}$, 为主索因 $H_p = 1$ 引起的伸长。

式(3-5)和式(3-12)或(3-13)组成了悬索桥的基本方程组。由于 H_p 中包含着挠度 $\eta(x)$, 因此, 式(3-5)中的 $-H\eta''$ 是一个非线性项, 必须通过反复叠代求解。

3.1.2 振动方程

令式(3-5)所表示的静力平衡位置时的荷载、挠度和主索水平拉力记为 p_0, η_0, H_{p0} 和 H_0 , 随时间 t 变化的动力荷载 $p(x, t)$ 所产生的振动挠度和主索水平拉力分别为 $\eta(x, t)$ 和 $H_p(t)$, 且

$$H(t) = H_0 + H_p(t) = H_g + H_{p0} + H_p(t) \quad (3-14)$$

显然,如果 $p_0 = 0$ 即为悬索桥自重作用下的空载情况, $H_{p0} = 0$ 。振动时,加劲梁的动力平衡方程为

$$\begin{aligned} EI(\eta_0 + \eta)^{(4)} - (H_0 + H_p)(\eta''_0 + \eta'') + 2\beta m\dot{\eta} + m\ddot{\eta} \\ = p_0 + p(x, t) + (H_{p0} + H_p)(y'' + \eta'') \end{aligned} \quad (3-15)$$

减去式(3-5)描述的静力方程,并略去高阶微量 $H_{p0}\eta''$ 和 $H_p\eta''$ 项,得悬索桥竖向振动方程为

$$EI\eta^{(4)} - H(t)\eta'' - H_p(t)(y'' + \eta''_0) + 2\beta m\dot{\eta} + m\ddot{\eta} = p(x, t) \quad (3-16)$$

式中, m 为单位桥长的质量; β 为阻尼对数衰减率; $H_p(t)$ 为

$$H_p(t) = -\frac{1}{\Delta L} \int_0^l y'' \eta(x, t) dx \quad (3-17)$$

实际上, $H(t)$ 的变化是很微小的,可以近似地忽略 $H_p(t)$, 取

$$H(t) = H_g + H_{p0} = H_0 = \text{常数}$$

这样,非线性项将简化为线性项,振动方程(3-16)也就简化成线性方程

$$EI\eta^{(4)} - H_0\eta'' + 2\beta m\dot{\eta} + m\ddot{\eta} = p(x, t) \quad (3-18)$$

3.1.3 固有振动

对空桥的情况,有 $\eta_0(x) = 0$, $H_{p0} = 0$, 不考虑阻尼项,得悬索桥在空桥时的固有振动方程为

$$\left. \begin{aligned} EI\eta^{(4)} - H_0\eta'' - y''H_p + m\ddot{\eta} &= 0 \\ H_p &= -\frac{1}{\Delta L} \int_0^l y'' \eta dx \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

式中, $H_0 = H_g$, H_p 是由振动时的惯性力项所引起的附加水平拉力。

与拱桥固有振动方程(2-45)相比,仅 $H_0\eta''$ 项改为负号而已,因而求解方法也相同。

与拱桥相同,悬索桥的各阶反对称振动是相互独立的,其固有频率也可写成

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI\nu_k}{m}} \quad (k = 2, 4, 6, \dots) \quad (3-20)$$

式中, $\nu_k = 1 + \frac{H_0 l^2}{k^2 \pi^2 EI}$, 与式(2-50)相比减号变加号, 可以看成是因水平拉力的作用而使加劲梁刚度增大的系数。

最低阶反对称弯曲固有频率为

$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI\nu_2}{m}} \quad (3-21)$$

对称振型的各阶振型和相应的频率则必须从联立方程组(3-19)中解出, 与拱桥相似。

在常用的矢跨比范围内, 悬索桥的最低阶固有频率是反对称两个半波形式, 与拱桥也相似。

3.1.4 近似计算

若将式(3-21)写成如下的单自由度体系的频率公式

$$\omega_{k2} = \sqrt{\frac{K_B}{m}}$$

则悬索桥反对称振动($k=2$)时的等效刚度为

$$K_B = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 EI\nu_2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 EI + \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 H_0$$

因特大跨径公路悬索桥的索力很大, 而加劲梁的高跨比则较小, 一般 $\frac{\pi^2 EI}{H_0 l^2} < 0.05$ 。因此, 上式中的第一项与第二项相比是次要的。这意味着悬索桥的总体刚度主要由主索提供, 而不依靠加劲梁的刚度。如果近似地略去第一项, 并引入 $H_0 = H_g = \frac{gl^2}{8f}$, 得

$$K_B = \frac{\pi^2 g}{2f}$$

于是, 悬索桥的反对称弯曲固有频率可按下列近似公式计算

$$f_{k2} = \frac{\omega_{k2}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_B}{m}} = \sqrt{\frac{g}{8fm}} = 1.107/\sqrt{f} \quad (3-22)$$

应该注意,对于跨径 $l < 500\text{m}$ 或加劲梁较强大的悬索桥,应当按式(3-21)计算固有频率。

例 3.1.1 悬索桥的固有振动分析。

如图 3-3 所示,已知

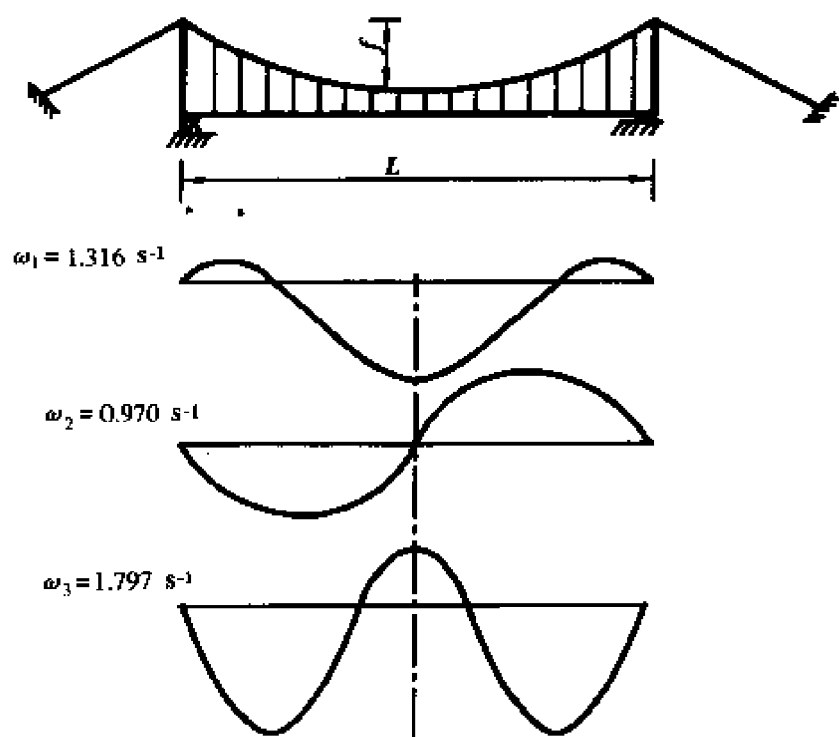


图 3-3 悬索桥的振型

计算跨径 $l = 750\text{m}$, $f = 87.3\text{m}$,

恒载 $g = 500\text{kN/m}$

主索 $E_c = 1600\text{kN/cm}^2$, $A_c = 1.15\text{m}^2$

加劲梁 $E = 2100\text{kN/cm}^2$, $I = 13.5\text{m}^4$

解之得空桥时的前三阶频率和相应的振型函数分别为

$$\omega_1 = 1.316 \quad \text{l/s}$$

$$\omega_2 = 0.97 \quad \text{l/s}$$

$$\omega_3 = 1.797 \quad \text{l/s}$$

$$\eta_1(x) = A_1 \left(\sin \frac{\pi x}{l} - 0.579 \sin \frac{3\pi x}{l} \right)$$

$$\eta_2(x) = A_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

$$\eta_3(x) = A_3 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + 1.728 \sin \frac{3\pi x}{l} \right)$$

与有限元法计算结果的对比列于表 3-1。

前三阶振动圆频率 (1/s)			表 3-1
阶 数	1	2	3
解析解	1.316	0.97	1.797
有限元解	1.364	0.912	1.817

由上表可见,悬索桥因其刚度较小的特性,其前几阶的频率较小,实测时应引起足够的注意。

3.2 悬索桥的扭转固有振动

悬索桥加劲梁的扭转振动实际上和水平挠曲振动耦合在一起,同时还伴随着微小的竖向挠曲振动。由于耦合项都是非线性的,如果只考虑微小的振动而忽略非线性项,则线性的固有振动方程将可分离,即扭转固有振动可以作为一种单独的振动体系来处理。

下面用能量原理来导引图 3-1 所示悬索桥的扭转振动的基本方程。假定其扭转中心与加劲梁相同。

加劲梁约束扭转的应变能为

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_L EI_w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3-23)$$

加劲梁自由扭转的应变能为

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_L GI_d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3-24)$$

主索的应变能即索力在主索变形中所做的功为

$$V_3 = \frac{H_s B^2}{4} \int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{4fB}{l^2} H_p \int_L \varphi dx \quad (3-25)$$

式中, EI_w 为加劲梁的约束扭转刚度; GI_d 为加劲梁的自由扭转刚

度; H_g 为半侧桥主索中的恒载水平拉力; H_p 为振动时相应的主索中的水平拉力增量; f 为主索的垂度; B 为加劲梁宽度, 即两主索间的距离, φ 为加劲梁扭转角。

加劲梁的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_L m_s r^2 \dot{\varphi}^2 dx \quad (3-26)$$

主索的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_L m_c \left(\frac{B}{2} \dot{\varphi} \right)^2 dx \quad (3-27)$$

式中, r 为加劲梁的惯性回转半径; m_s 为加劲梁沿跨径的分布质量, m_c 为主索的分布质量。

于是, 能量的总和为

$$T - V = \frac{1}{2} \int_L \left[\left(m_s r^2 + \frac{B^2}{4} m_c \right) \dot{\varphi}^2 - EI_w \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 - \left(GI_d + \frac{H_g B^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{8f}{l^2} BH_p \varphi \right] dx$$

对上式应用拉格朗日方程, 给出悬索桥的扭转固有振动方程如下

$$EI_w \varphi^{(4)} - \left(GI_d + \frac{H_g B^2}{2} \right) \varphi'' + \frac{4f}{l^2} BH_p + \left(m_s r^2 + \frac{B^2}{4} m_c \right) \ddot{\varphi} = 0 \quad (3-28)$$

由主索两端锚固点之间的水平位移为零的条件, 可得补充方程

$$\frac{L}{E_c A_c} H_p = \frac{4f}{l^2} B \int_L \varphi dx \quad (3-29)$$

式(2-28)和式(2-29)组成了悬索桥扭转固有振动的基本方程组。它们和上节中悬索桥的弯曲固有振动方程完全相似, 因而可以用同样的方法求解。

对于最不利的一阶反对称扭转振动($k=2$), $H_p \approx 0$, 固有频率为

$$\omega_{T2} = \sqrt{\frac{EI_w \left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 + \left(GI_d + \frac{H_g B^2}{2}\right) \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2}{m_s r^2 + \frac{B^2}{4} m_c}} \quad (3-30)$$

令 $b = \frac{B}{2}$, 为半桥宽, 则上式可改写为

$$\omega_{T2} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_w \nu_{T2}}{m_s r^2 + b^2 m_c}} \quad (3-31)$$

式中

$$\nu_{T2} = 1 + \frac{GI_d + H_g b^2}{EI_w} \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

对于 H 型开口截面的加劲梁, GI_d 一般很小, 可忽略不计。而约束扭转刚度 $I_w \approx Ib^2$, 上式可简化为

$$\omega_{T2} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI b^2 \nu_{T2}}{m_s r^2 + b^2 m_c}} \quad (3-32)$$

式中, $\nu_{T2} = 1 + \frac{H_g l^2}{4\pi^2 EI}$ 。

如果令 $m = m_s + m_c$, 与式(3-21)相比, 则反对称扭弯频率比为

$$\epsilon = \frac{\omega_{T2}}{\omega_{B2}} = \sqrt{\frac{m_s + m_c}{m_s \left(\frac{r}{b}\right)^2 + m_c}}$$

因为主索的质量相对于加劲梁的质量 m_s 较小, 若略去不计, 上式可进一步简化为

$$\epsilon = \frac{b}{r} \quad (3-33)$$

式中, b 为半桥宽, r 为加劲梁的回转半径。

根据统计, 采用开口截面加劲梁的悬索桥, 其扭弯频率比的近似值为

$$\epsilon \approx 1.3$$

对于闭口截面的加劲梁, 自由扭转将成为主要因素, 而约束扭

转刚度则相对较小,可略去不计。此时

$$\omega_{T2} = \left(\frac{2\pi}{l} \right) \sqrt{\frac{GI_d + H_g b^2}{m_g r^2 + m_c b^2}} \quad (3-34)$$

根据统计,采用闭口截面加劲梁的悬索桥,其扭转频率比的近似值为

$$\epsilon \approx 1.5$$

比开口截面增大约 15%。

3.3 悬索桥施工猫道的固有振动

猫道是悬索桥主索施工过程中作为施工人员工作平台和通道的一种临时性结构,其本身是一种柔性结构。研究猫道的固有振动特性,对确保主索施工过程中猫道的抗风安全和进行抗风稳定性研究具有重要意义。

根据猫道结构的自身特点,将其作为带有预张力的索桁架结构。由于塔相对于猫道为刚性体,因此仅研究猫道中跨,而忽略边跨和塔的影响。

3.3.1 猫道的固有振动

1. 竖向固有振动

猫道在铅垂方向的固有振动方程可从式(3-19)导得。因为猫道结构中的平台 $EI \approx 0$,并令竖向位移为 $w(x, t)$,则

$$H_{pu} y''_u + H_{pl} y''_l + (H_{ou} + H_{ol}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \ddot{w} \quad (3-35)$$

式中, y_u 和 y_l 分别为猫道上、下弦的原有线形; H_{ou} 和 H_{ol} 分别为猫道上、下弦的恒载水平张力; m 为猫道单位跨径长度的质量; H_{pu} 和 H_{pl} 分别为猫道上、下弦张力在水平方向因振动而引起的增量,即

$$H_{pu} = - \frac{E_c A_{cu}}{L_{su}} \int w(x, t) y'_u dx \quad (3-36)$$

$$H_{pl} = - \frac{E_c A_{cl}}{L_{sl}} \int w(x, t) y''_l dx \quad (3-37)$$

式中

$$L_{su} = \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi_u} = \int_0^{l_u} [1 + (y'_u)^2]^{3/2} dx$$

$$L_{sl} = \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi_l} = \int_0^{l_l} [1 + (y'_l)^2]^{3/2} dx$$

其中 l_u 和 l_l 分别为猫道上、下弦的计算跨径; $E_c A_{cu}$ 和 $E_c A_{cl}$ 分别为猫道上、下弦的轴向刚度。

引入符号

$$\eta = y''_l / y''_u \quad (3-38)$$

和

$$\zeta = E_c A_{cl} / E_c A_{cu} \quad (3-39)$$

同时假设猫道的上、下弦均为二次抛物线型,且具有相同的矢跨比,则有

$$L_{su} = L_{sl} = L_s$$

振动是简谐的,即

$$\ddot{w}(x, t) = -\omega^2 W(x) \sin \omega t \quad (3-40)$$

将以上各量代入式(3-35),得

$$(y''_u)^2 \frac{E_c A_{cu}}{L_s} (1 + \zeta \eta^2) \int_0^l W(x) dx$$

$$- (H_{ou} + H_{ol}) W''(x) = m \omega^2 W(x) \quad (3-41)$$

式中, ω 为猫道固有振动频率。

用迦辽金法求解式(3-41)。利用边界条件,假设 $W(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin \frac{i\pi x}{l}$, 可分别求得一阶对称竖向振动频率和一阶反对称竖向振动频率。对于一阶对称竖向振动,其边界条件为 $W(0) = W(l) = 0$, 则有

$$\omega = \frac{\pi}{l} \left[\frac{(H_{ou} + H_{ol})}{m} + \frac{8(y''_u)^2 E_c A_{cu} (1 + \zeta \eta^2) l^3}{\pi^4 L_s m} \right]^{1/2} \quad (3-42)$$

对于一阶反对称竖向振动,其边界条件为 $W(0) = W(l/2) = 0$,则有

$$\omega = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou} + H_{ol}}{m}} \quad (3-43)$$

2. 侧向固有振动

猫道侧向振动方程可描述为

$$(H_{ou} + H_{ol}) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (3-44)$$

式中, $v(x, t)$ 为猫道的侧向位移;其余各量同前。

设振动是简谐的,即

$$\ddot{v}(x, t) = -\omega^2 V(x) \sin \omega t \quad (3-45)$$

式中, ω 为猫道侧向固有振动频率。代入式(3-44),则有

$$(H_{ou} + H_{ol}) V''(x) + m\omega^2 V(x) = 0 \quad (3-46)$$

根据边界条件 $V(0) = V(l) = 0$,即可求得式(3-46)的第 n 阶侧向固有振动频率为

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou} + H_{ol}}{m}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3-47)$$

3. 扭转固有振动

由式(3-28),令 $EI_w = GI_d = 0$, $m_s r^2 = 0$,则猫道扭转固有振动方程为

$$-\frac{H_0 B^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{4f}{l^2} B H_p + \frac{B^2}{4} m \ddot{\varphi} = 0 \quad (3-48)$$

式中, B 为两猫道悬索的中心距离; φ 为扭转角; $H_0 = H_{ou} + H_{ol}$, $H_p = H_{pu} + H_{pl}$ 。

补充方程同式(3-29)。

对于一阶反对称扭转振动,其边条件为 $\varphi(0) = \varphi(l/2) = 0$,振动频率为

$$\omega_T = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{2H_0}{m}} \quad (3-49)$$

3.3.2 近似计算

以猫道的一阶反对称竖向振动固有频率计算为例,给出该频率的近似计算公式。

抗风缆张力对猫道振动频率产生的影响主要表现在两个方面:①抗风缆张力自身对频率的贡献,体现在公式的 H_{ol} 中;②增设抗风缆使得承重缆索张力增加。

设猫道承重缆和抗风缆的矢高分别为 f_u 和 f_l ,则可得到由于抗风缆张力引起的承重缆张力的变化为

$$H_{ou2} = H_{ol} \frac{f_l}{f_u} \quad (3-50)$$

在增设抗风缆后,猫道承重缆的张力为

$$H_{ou} = H_{ou1} + H_{ou2} = H_{ou1} + H_{ol} \frac{f_l}{f_u} \quad (3-51)$$

式中, H_{ol} 为抗风缆水平张力; $H_{ou1} = \frac{mgl^2}{8f_u}$, 为由猫道总重量引起的承重缆的水平张力。

将式(3-51)的 H_{ou} 和 H_{ol} 代入式(3-43)可得一阶反对称竖向振动频率

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou} + H_{ol}}{m}} \\ &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou1} + H_{ol}\lambda + H_{ol}}{m}} \\ &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou1} + (1 + \lambda)H_{ol}}{m}} \\ &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H_{ou1}}{m}} \sqrt{1 + (1 + \lambda)\mu} \end{aligned} \quad (3-52)$$

式中, $\lambda = f_l/f_u$ 为猫道的抗风缆垂度和承重缆垂度之比; $\mu = H_{ol}/H_{ou1}$ 为抗风缆水平张力与承重缆恒载水平张力之比。

对 $[1 + (1 + \lambda)\mu]^{1/2}$ 在 $\mu = 0$ 时展开为泰勒级数,取其前两项,

则得

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{mgl^2}{8mf_0}} [1 + (1 + \lambda)\mu/2] \\ &= 6.9542 [1 + (1 + \lambda)\mu/2] / \sqrt{f_0} \quad (3-53)\end{aligned}$$

运用同样的方法可以得到一阶对称侧向振动和一阶反对称扭转振动的频率近似计算公式。

在计算机和有限元法的应用已经十分普及的今天,应用有限元程序按精确的力学模型来计算猫道的自振特性,可考虑质量沿跨长方向的不均匀分布,以及吊杆、横向天桥等因素的影响。

例 3.3.1 已知虎门大桥猫道设计参数为:跨径 $l = 888\text{m}$,沿跨长单位长度质量 $m = 193.55\text{kg/m}$,承重缆垂度 $f_0 = 72.854\text{m}$,抗风缆垂度 $f_1 = 68.706\text{m}$,抗风缆张力 $H_{01} = 0.3804\text{MN}$,承重缆张力 $H_{01} = 2.984\text{MN}$ 。

利用理论公式、近似计算公式和有限元法分别计算,结果列于表 3-2。

猫道固有频率 (H_s)

表 3-2

序号	固有振动特点	理论公式	近似公式	有限元
1	一阶对称侧向振动	0.0742	0.0733	0.0734
2	一阶反对称侧向振动	0.1485	0.1466	0.1449
3	一阶反对称竖向振动	0.1485	0.1466	0.1454

由此可见,本小节的近似计算公式是可靠的,也很简单,便于工程应用。

3.4 悬索桥的车辆强迫振动

同梁桥的车辆强迫振动相似,采用模态分析法求解悬索桥的车辆强迫振动问题。

由方程式(3-18)略去阻尼项 $2\beta m\dot{\eta}$ 后,方程简化为

$$EI\eta^{(4)} - H_0\eta'' + m\ddot{\eta} = p(x, t) \quad (3-54)$$

设悬索桥挠曲振动的动挠度为

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t) \quad (3-55)$$

代入式(3-54),并在两边同乘以 $\varphi_k(x)$,并对 x 在 0 到 l 范围内积分,利用振型的正交性,有

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3-56)$$

式中,

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^l \varphi_n^{(4)} \varphi_n dx - H_0 \int_0^l \varphi_n'' \varphi_n dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \quad (3-57)$$

为悬索桥的第 n 阶固有振动频率;广义激扰力为

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l p(x, t) \varphi_n(x) dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \quad (3-58)$$

在悬索桥上行驶的典型作用力有以下两种:

1. 匀速移动的集中荷载 $P(t)$

$$Q_n(t) = \frac{\int_0^l P(t) \delta(x - vt) \varphi_n(x) dx}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} = \frac{P(t) \varphi_n(vt)}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \quad (3-59)$$

2. 匀速移动的简谐力 $P_0 \cos \Omega_p t$

$$Q_n(t) = \frac{P_0 \cos \Omega_p t \varphi_n(vt)}{m \int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \quad (3-60)$$

方程(3-56)的解可写成

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (3-61)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中, A_n 和 B_n 为第 n 阶振动的待定系数, 取决于初始条件。

研究强迫振动响应, 必须考虑结构阻尼的影响。用上述类似方法, 可得带阻尼的强迫振方程为

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = Q_n(t) \quad (3-62)$$

式中, $\zeta_n = \beta/\omega_n$, 为第 n 阶阻尼比; 其余各量同前。很容易写出式 (3-62) 的解, 这里从略。

例 3.4.1 如图 3-4 所示为三跨悬索桥, 受到匀速移动的常量力 P_0 的作用, 求其响应。

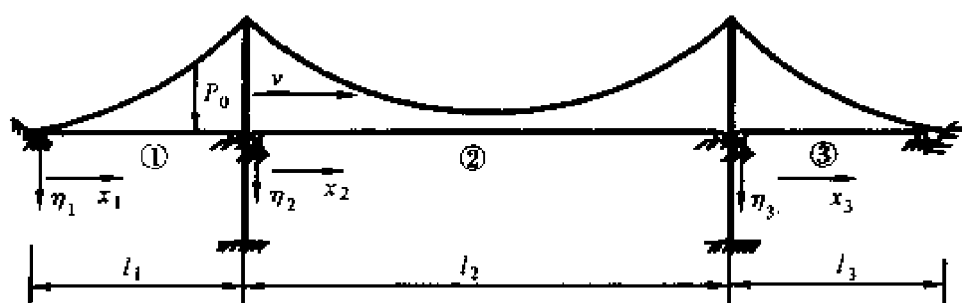


图 3-4 三跨悬索桥

设三跨加劲梁均简单铰支。每跨动挠度设为

$$\eta_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk}(t) \sin \frac{k\pi x_n}{l_n} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (3-63)$$

相应地, 三跨悬索桥的系统动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} m_n \dot{\eta}_n^2 dx_n = \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^3 m_n l_n \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_{nk}^2(t) \quad (3-64)$$

系统应变能由加劲梁弯曲应变能、主索恒载水平力 H_0 产生的应变能和索力增量产生的拉伸应变能等组成, 即

$$V = V_b + V_{H_0} + V_s = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} EI_n (\eta_n'')^2 dx_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} H_0 (\eta_n')^2 dx + \frac{1}{2} \int_L T d\epsilon \quad (3-65)$$

式中,

$$\begin{aligned}
 V_b &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} EI_n (\eta''_n)^2 dx_n \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 EI_n l_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^4 q_{nk}^2(t)
 \end{aligned} \quad (3-66)$$

$$\begin{aligned}
 V_{H_0} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} H_0 (\eta'_n)^2 dx_n \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 H_0 l_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^2 q_{nk}^2(t)
 \end{aligned} \quad (3-67)$$

$$V_s = \frac{1}{2} \int_L T d\epsilon$$

由式(3-12)则有

$$\begin{aligned}
 H_p &= - \sum_{n=1}^3 y''_n F_{\eta n} (E_c A_c / L_s) \\
 &= - \frac{E_c A_c}{L_s} \sum_{n=1}^3 y''_n \int_0^{l_n} \eta_n dx_n
 \end{aligned} \quad (3-68)$$

令 $\epsilon = \frac{T}{E_c A_c}$, 为主索单位长度应变, 并由 $T = H_p \frac{ds}{dx}$, 则

$$d\epsilon = \frac{T}{E_c A_c} ds = \frac{H_p}{E_c A_c} \frac{(ds)^2}{dx} = \frac{H_p}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right) ds$$

所以, 有

$$\begin{aligned}
 V_s &= \frac{1}{2} \int_L T d\epsilon \\
 &= \frac{1}{2} \int_L \frac{H_p^2}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 ds \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(E_c A_c)^2}{L_s^2} \left(\sum_{n=1}^3 y''_n \int_0^{l_n} \eta_n dx_n \right)^2 \int_L \frac{dx}{\cos^3 \varphi} \\
 &= \frac{2E_c A_c}{L_s \pi^2} \left(\sum_{n=1}^3 \frac{l_n}{\rho_n} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{nk}(t)}{k} \right)^2
 \end{aligned} \quad (3-69)$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{nk}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{nk}} + \frac{\partial V}{\partial q_{nk}} = F_{nk} \quad (3-70)$$

中的广义力 F_{nk} 由移动荷载在广义坐标上所作的虚功求出, 即

$$\begin{aligned}\delta W_n &= \int_0^{l_n} p(x, t) \delta \eta_n(x, t) dx_n \\ &= \int_0^{l_n} p(x, t) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_n}{l_n} \delta q_{nk} dx_n \\ (n &= 1, 2, 3)\end{aligned}\quad (3-71)$$

当 P_0 在第一跨加劲梁上匀速移动时, 即

$$\begin{aligned}\delta W_1 &= \int_0^{l_1} P_0 \delta(x_1 - vt) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_1}{l_1} \delta q_{1k} dx_1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_0 \sin \frac{k\pi vt}{l_1} \delta q_{1k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}(t) \delta q_{1k} \quad (0 \leq t \leq \frac{l_1}{v})\end{aligned}\quad (3-72)$$

当 P_0 在第二跨加劲梁上匀速移动时, 即

$$\begin{aligned}\delta W_2 &= \int_0^{l_2} P_0 \delta[x_2 - (vt - l_1)] \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_2}{l_2} \delta q_{2k} dx_2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_0 \sin \frac{k\pi}{l_2} (vt - l_1) \delta q_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \delta q_{2k} \quad \left(\frac{l_1}{v} < t \leq \frac{l_1 + l_2}{v} \right)\end{aligned}\quad (3-73)$$

当 P_0 在第三跨加劲梁上匀速移动时, 即

$$\begin{aligned}\delta W_3 &= \int_0^{l_3} P_0 \delta[x_3 - (vt - l_1 - l_2)] \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_3}{l_3} \delta q_{3k} dx_3 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_0 \sin \frac{k\pi}{l_3} (vt - l_1 - l_2) \delta q_{3k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_{3k}(t) \delta q_{3k} \quad \left(\frac{l_1 + l_2}{v} < t \leq \frac{l_1 + l_2 + l_3}{v} \right)\end{aligned}\quad (3-74)$$

因此,可分别求得相应于 δq_{1k} , δq_{2k} 和 δq_{3k} 的广义力分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{1k}(t) &= P_0 \sin \frac{k\pi \omega t}{l_1} \\ F_{2k}(t) &= P_0 \sin \left(\frac{k\pi \omega t}{l_2} - \frac{k\pi l_1}{l_2} \right) \\ F_{3k}(t) &= P_0 \sin \left[\frac{k\pi \omega t}{l_3} - \frac{k\pi (l_1 + l_2)}{l_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-75)$$

再 令

$$Q_{nk}(t) = \frac{2F_{nk}(t)}{m_n l_n}$$

并将式(3-64), 式(3-65)代入式(3-70), 得广义坐标描述的匀速移动常量力作用下的悬索桥强迫振动方程如下

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{nk}(t) + \left[\frac{EI_n}{m_n} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^4 + \frac{H_0}{m_n} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^2 \right] q_{nk}(t) &= Q_{nk}(t) \\ (k = 2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (3-76)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{nk}(t) + \left[\frac{EI_n}{m_n} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^4 + \frac{H_0}{m_n} \left(\frac{k\pi}{l_n} \right)^2 \right] q_{nk}(t) \\ + \frac{8E_c A_c}{\pi^2 m_n l_n L_s k} \left(\sum_{n=1}^3 \frac{l_n}{\rho_n} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{nk}(t)}{k} \right) &= Q_{nk}(t) \\ (k = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (3-77)$$

考虑到两边跨一般对称设计, 上式可写成

当 k 为偶数时, 有

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_{1k}(t) + \epsilon_{1k}^2 q_{1k}(t) &= Q_{1k}(t) \\ \ddot{q}_{2k}(t) + \epsilon_{2k}^2 q_{2k}(t) &= Q_{2k}(t) \\ \ddot{q}_{3k}(t) + \epsilon_{3k}^2 q_{3k}(t) &= Q_{3k}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-78)$$

三个方程对应着三跨, 彼此不耦合。

当 k 为奇数时,有

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{q}_{1k}(t) + \epsilon_{1k}^2 q_{1k}(t) + \frac{\alpha_2^2 \gamma}{k} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{2j}(t)}{j} + \\ & \frac{\alpha_1^2}{k} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{1j}(t) + q_{3j}(t)}{j} = Q_{1k}(t) \\ & \ddot{q}_{2k}(t) + \epsilon_{2k}^2 q_{2k}(t) + \frac{\alpha_2^2}{k} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{2j}(t)}{j} + \\ & \frac{\alpha_1^2}{k\gamma} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{1j}(t) + q_{3j}(t)}{j} = Q_{2k}(t) \\ & \ddot{q}_{3k}(t) + \epsilon_{3k}^2 q_{3k}(t) + \frac{\alpha_2^2 \gamma}{k} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{2j}(t)}{j} + \\ & \frac{\alpha_1^2}{k} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{q_{1j}(t) + q_{3j}(t)}{j} = Q_{3k}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-79)$$

以上各式中,

$$\epsilon_{1k}^2 = \epsilon_{3k}^2 = \frac{EI_1}{m_1} \left(\frac{k\pi}{l_1} \right)^4 + \frac{H_0}{m_2} \left(\frac{k\pi}{l_1} \right)^2$$

$$\epsilon_{2k}^2 = \frac{EI_2}{m_2} \left(\frac{k\pi}{l_2} \right)^4 + \frac{H_0}{m_2} \left(\frac{k\pi}{l_2} \right)^2$$

$$\alpha_n^2 = \frac{8E_c A_c}{\pi^2 L_s m_n \rho_n}$$

$$\gamma = \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1}$$

$\eta_n(x, t)$ 为第 n 跨的挠度函数; l_n 为加劲梁的计算跨径; m_n 为单位跨长索梁质量; EI_n 为加劲梁的弯曲刚度; H_0 为主索的恒载水平拉力; $E_c A_c$ 为主索的拉伸刚度; $L_s = \int \frac{dx}{\cos^3 \varphi}$ 为沿全索长积分; $\rho_n = l_n^2 / 8f_n$ 为主索在第 n 跨的曲率半径; f_n 为主索的垂度。

当研究悬索桥低阶振动响应时,可以取(3-63)中的有限项,即有关于 $k \leq N$ 分别为偶数和奇数的线性微分方程组,应用数值积分法,借助于电子计算机即可完成求解。如果再计入阻尼的影响,在方程(3-78)和(3-79)中将相应地增加阻尼力项即可。

第四章 斜拉桥振动

第二次世界大战后出现的现代斜拉桥是不同于悬索桥的另一种悬吊桥梁结构。由于斜拉桥具有可悬臂施工,造价适宜和外形美观等突出优点,因而在跨径 200 ~ 600m 范围内获得了巨大的成功,并正在向更大的跨径发展。

斜拉桥的自振特性也同样具有两个部分内容:首先是指结构总体的动力特性,将斜拉索处理为一个受轴向拉力的杆单元(或索单元),其弹性模量必须考虑垂度影响进行修正。另一部分则指斜拉索的自身局部振动问题,作为斜拉索支承点的结构总体的振动将会使斜拉索中的轴向拉力发生周期性变化,当结构的总体频率和某一斜拉索的横向局部振动频率成倍数关系时,将会引发斜拉索的自激性参数共振,造成斜拉索大振幅的局部振动。

作为斜拉索振动有利的一面就是利用其动力特性来估算斜拉索中的张力,这种由实测斜拉索固有振动频率估算张力的方法已广泛应用于工程实践。本章将重点讨论斜拉索的局部振动特性。

4.1 斜拉索的振动特性

4.1.1 水平张紧索的横向固有振动

作为斜拉索局部振动分析的基础,先讨论如图 4-1 表示的一根水平的张紧钢索。设拉索的弦长为 l , 均匀分布质量为 m , 拉索中的水平拉力为 S_0 。在拉索作微小横向振动时,其水平拉力增值为 S , 不计索的弯曲刚度 EI 的影响。

在自重 mg 作用下,小变形时拉索的静平衡方程为

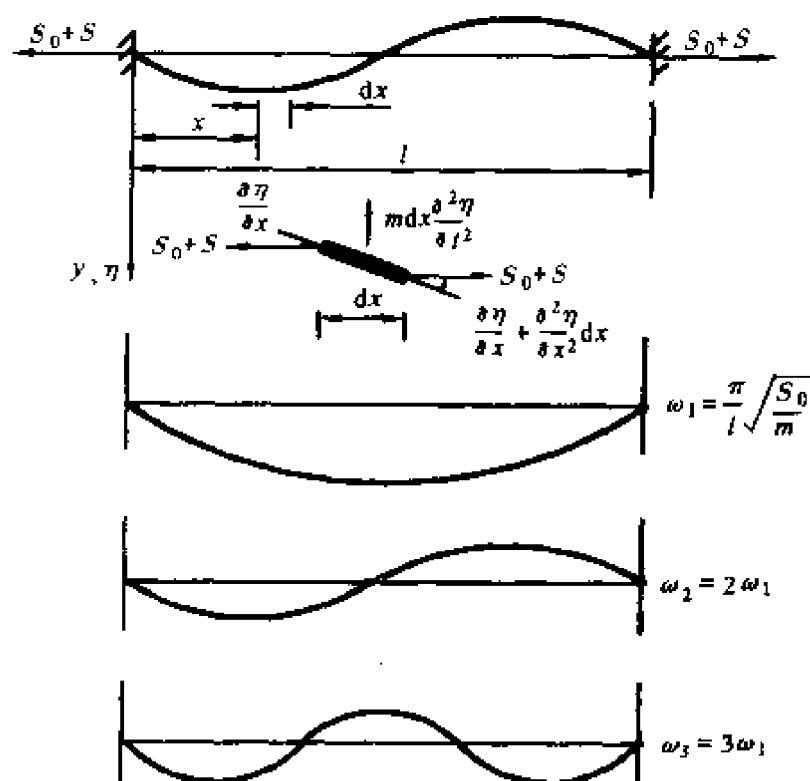


图 4-1 水平张紧索的横向振动

$$S_0(y' + y'' dx) - S_0 y' + mg dx = 0$$

或

$$S_0 y'' + mg = 0 \quad (4-1)$$

式中, y 为拉索静态的垂度函数。

拉索在作横向微小振动时,其动力平衡方程可表示为

$$(S_0 + S)(y'' + \eta'') + mg - m\ddot{\eta} = 0$$

式中, $\eta(x, t)$ 为拉索的横向振动位移函数。

引入式(4-1),略去高阶小量 $S\eta''$ 项,上式简化为

$$S_0 \eta'' + S y'' - m\ddot{\eta} = 0 \quad (4-2)$$

由于 S 和 η 均为未知函数,必须再补充一个方程。

已知拉索在静力 mg 作用下的索长为

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

受到扰动后作横向振动,索长改变为

$$L + \Delta L = \int_0^l \sqrt{1 + (y' + \eta')^2} dx$$

即

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^l [\sqrt{1 + (y' + \eta')^2} - \sqrt{1 + (y')^2}] dx \\ &= \int_0^l \frac{1 + (y' + \eta')^2 - (1 + y'^2)}{\sqrt{1 + (y' + \eta')^2} + \sqrt{1 + (y')^2}} dx \\ &\approx \int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{d\eta}{dx} dx \\ &= y' \eta \Big|_0^l - \int_0^l \eta y'' dx \\ &= \frac{mg}{s_0} \int_0^l \eta dx \end{aligned} \quad (4-3)$$

式中,引用了拉索两端竖向变位为零的边界条件。

引入 $\Delta L = \frac{SL}{E_c A_c}$, 则

$$S = \frac{E_c A_c}{L \rho} \int_0^l \eta dx \quad (4-4)$$

式中, $E_c A_c$ 为拉索的有效抗拉刚度, $\rho = -\frac{1}{y''}$, 为拉索静力作用下垂度曲线的曲率半径。

将式(4-2)和式(4-4)联立就组成了张紧索的横向固有振动方程组。显然,式(4-3)具有能量守恒的含义,即在初始荷载作用下,拉索上的横向荷载等于 mg , 拉索的全部拉力近似地等于水平拉力 S_0 。假如拉索横向变位增加一个微小量 η , 则右侧的表达式给出了荷载 mg 所做的功;左侧表达式是相应的拉索被拉长了 ΔL 时,拉力 S_0 所做的功。由于在拉索横向变位中高于一次项所供给的那部分功略去不计,所以这两部分功必须相等。

一般情况下,张紧索在横向振动过程中其拉力增量 S 不大,可略去其影响。式(4-2)可简化为

$$\ddot{\eta} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (4-5)$$

式中, $c = \sqrt{\frac{S_0}{m}}$ 。

可见, 上式与一维波动方程相似, 这里的 c 相当于波动方程中的波速。

线性方程中的变量可分离, 且振动是简谐的。因此, 方程式的解可写成

$$\eta(x, t) = \varphi(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (4-6)$$

式中, ω 为固有振动频率; $\varphi(x)$ 为振型函数; A 和 B 是由拉索边界条件确定的系数。

将式(4-6)代入方程(4-5), 得振型方程为

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x) = 0$$

解为

$$\varphi(x) = C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c} \quad (4-7)$$

若拉索的两端是固定不动的, 有

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

于是, 有

$$C = 0, D \sin \frac{\omega l}{c} = 0。要 D \neq 0, 则必须 \sin \frac{\omega l}{c} = 0$$

或

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由此可得, 拉索横向振动的固有频率

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S_0}{m}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-8)$$

相应的振型为

$$\varphi_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-9)$$

由式(4-8), 拉索的拉力

$$S_0 = \frac{ml^2}{\pi^2 n^2} \omega_n^2 = \frac{4ml^2}{n^2} f_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-10)$$

式中, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$, 为各阶工程频率, 往往可实测得到, 这就是工程中常用的索力仪测力原理。

最后, 再分析一下拉索弯曲刚度的影响。参照式(4-2), 考虑拉索抗弯刚度的固有振动方程可表示为

$$EI_c \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - S_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + m\ddot{\eta} = 0 \quad (4-11)$$

上式与式(1-40)相比, 除了轴力项相差一个负号外两式相似, 因此求解方法也相同。

1. 两端铰支

类似于受轴向力作用的简支梁的情况。可得固有频率计算式为

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI_c}{l^4 m} + \frac{n^2 \pi^2 S_0}{l^2 m} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-12)$$

或

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S_0}{m} (1 + \delta_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-13)$$

式中, $\delta_n = \frac{n^2 \pi^2 EI_c}{l^2 S_0}$ 为考虑拉索弯曲刚度影响的修正系数。

2. 两端固结

相应的频率方程为

$$2\alpha\beta(1 - \cos\alpha l \cosh\beta l) + (\beta^2 - \alpha^2) \sin\alpha l \sinh\beta l = 0 \quad (4-14)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + 4a\omega_n^2} - b}{2a}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{\sqrt{b^2 + 4a\omega_n^2} + b}{2a}} \\ a &= \frac{EI_c}{m} \end{aligned}$$

$$b = \frac{S_0}{m}$$

求解超越方程式(4-14),可得相应的固有频率。

实际斜拉桥中,拉索一般是由平行钢丝编成的,因而拉索的弯曲刚度较小,其对频率的影响也是可以忽略的,尤其是索长较大的情况。

4.1.2 斜拉索的横向固有振动

实际斜拉桥中的拉索具有一定的自重和刚度,并斜置成一定倾角,如图 4-2 所示。在分析其横向固有振动前,有必要先研究其静力特性。

1. 斜拉索的静力分析

斜拉索的自重将使其产生一定的垂度。同时,当斜拉索的弦和水平线成一定倾角 θ 时,斜拉索两端切线方向的拉力 S_A 和 S_B 将有差异。

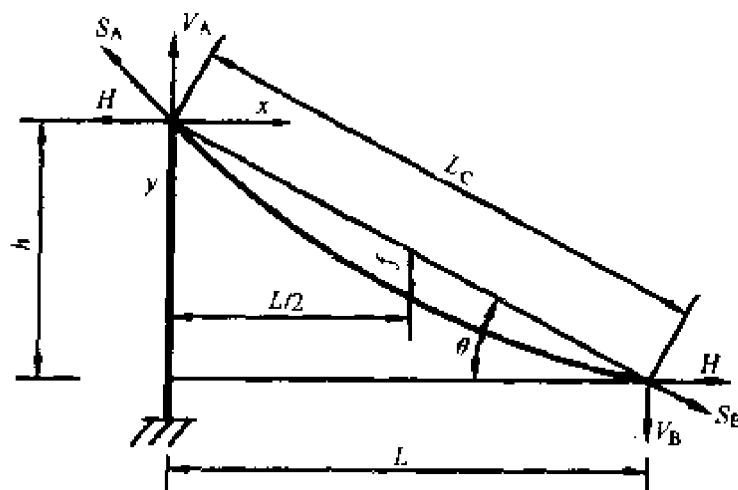


图 4-2 斜置拉索静力分析

设斜拉索的弦长为 L_c , 水平投影长度 $L = L_c \cos \theta$, 斜拉索两端的高差 $h = L_c \sin \theta$ 。

由于悬索的自重 q 是沿弧长均匀分布的, 其精确的静力平衡

方程应写成

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} + q \frac{dl}{dx} = 0 \quad (4-15)$$

式中, H 为斜拉索拉力的水平分量, q 为沿拉索弧长均匀分布的自重, dl 为斜拉索的微段弧长。

由几何关系, $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, 代入式(4-15)得

$$H \frac{dy'}{dx} + q \sqrt{1 + (y')^2} = 0$$

即

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -\frac{q}{H} dx \quad (4-16)$$

两边积分, 得

$$\operatorname{arcsinh} y' = -\frac{q}{H} x + C_1$$

或

$$y' = \sinh\left(-\frac{q}{H} x + C_1\right) \quad (4-17)$$

两边再积分, 得

$$y = -\frac{H}{q} \cosh\left(-\frac{q}{H} x + C_1\right) + C_2 \quad (4-18)$$

由斜拉索的边界条件

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, \quad y = 0 \\ x = L, \quad y = h \end{array} \right\}$$

代入式(4-18), 得

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\beta h}{L \sinh \beta}\right) + \beta \\ C_2 = \frac{H}{q} \cosh C_1 \end{array} \right\} \quad (4-19)$$

则式(4-18)可写成

$$y = \frac{H}{q} \left[\cosh \alpha - \cosh\left(\frac{2\beta x}{L} - \alpha\right) \right] \quad (4-20)$$

式中, $\alpha = \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\beta(h/L)}{\sinh \beta} \right] + \beta$

$$\beta = \frac{qL}{2H}$$

如果已知斜拉索的水平分力 H , 由式(4-17)可得斜拉索两端的竖向反力可表示为

$$\left. \begin{aligned} V_A &= H \sinh \alpha \\ V_B &= H \sinh(\alpha - 2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

斜拉索两端的切线方向拉力则为

$$\left. \begin{aligned} S_A &= H \cosh \alpha \\ S_B &= H \cosh(\alpha - 2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

斜拉索的弧长为

$$\hat{L}_c = \frac{2H}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) \quad (4-23)$$

当斜拉索两端位于同一高度时, $h = 0$, 变为水平拉索, 有

$$\alpha = \beta = \frac{qL}{2H}$$

式(4-20)改写为

$$y = \frac{H}{q} \left[\cosh \alpha - \cosh \left(\frac{qx}{H} - \alpha \right) \right] \quad (4-24)$$

相应的跨中垂度则为

$$f = \frac{H}{q} (\cosh \alpha - 1) \quad (4-25)$$

式(4-24)即为自重作用下的悬链线方程。

实际斜拉桥中的斜拉索垂度很小, 因而可以近似地假定重量沿水平方向是均布的。此时, 斜拉索的静力平衡方程可简化为

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} + q_x = 0 \quad (4-26)$$

式中, H 为斜拉索两端的水平拉力; q_x 为斜拉索沿水平跨长的分布重量, $q_x \approx q/\cos \theta$ 可假定为常数。

将式(4-26)积分两次, 并引入边界条件, 可得斜拉索的几何形状为二次抛物线

$$y = \frac{q_x x}{2H}(L - x) + \frac{h}{L}x \quad (4-27)$$

若将斜拉索的垂度 f 定义为斜拉索的中点离开弦线 AB 的铅垂距离,则由上式可得

$$\frac{h}{2} + f = \frac{q_x L^2}{8H} + \frac{h}{2}$$

即

$$H = \frac{q_x L^2}{8f} \quad (4-28)$$

将上式代入式(4-27),得

$$y = \frac{4fx(L - x)}{L^2} + \frac{h}{L}x \quad (4-29)$$

这是一条斜置的二次抛物线。斜拉索的曲线弧长

$$\hat{L}_c = \int_0^L \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

将式(4-29)代入上式积分,并略去高阶微量后得

$$\hat{L}_c = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (4-30)$$

斜拉索两端的竖向反力分别为

$$\left. \begin{aligned} V_A &= \frac{q_x L}{2} + H \frac{h}{L} \\ V_B &= \frac{q_x L}{2} - H \frac{h}{L} \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

切线方向的拉力分别为

$$\left. \begin{aligned} S_A &= \sqrt{H^2 + V_A^2} \\ S_B &= \sqrt{H^2 + V_B^2} \end{aligned} \right\} > S_B \quad (4-32)$$

斜拉索张力沿索长的变化规律为

$$S(x) = H \sqrt{1 + (y')^2} = H \sqrt{1 + \left(\frac{4f + h}{L} - \frac{8fx}{L^2} \right)^2} \quad (4-33)$$

当拉索的两个支点在同一水平线上时, $h = 0$, $\cos \theta = 1$, 上列各项可简化为大家所熟知的形式

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{qL^2}{8f} \\ y &= \frac{4fx(L-x)}{L^2} \\ \hat{L}_c &= L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{L} \right)^2 \right] \\ S(x) &= H \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{L} - \frac{8fx}{L^2} \right)^2} \\ S_{\max} &= S_A = S_B = H \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{L} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

如果保留更高一阶的微量,拉索的弧长可更精确地表示为

$$\hat{L}_c = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f}{L} \right)^5 \right] \quad (4-35)$$

当拉索呈铅垂放置时, $L = 0$, 垂度消失。

于是 $f = 0$ 和 $\cos\theta = 0$, 如图 4-3。此时

$$\left. \begin{aligned} S_A &= V_A \\ S_B &= V_B = V_A - qh \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

由此可见, 由于斜拉索重量和垂度的影响, 斜拉索的拉力沿索长是变化的。

实际斜拉桥中的斜拉索垂度是很小的, 其拉力和拉索自重相比较。图 4-2 所示的斜拉索, 由于荷载的作用使拉索的水平拉力由 H_0 增加至 H 时, 斜拉索在弦方向的弹性伸长量可表示为

$$\Delta_e = L_c \left(\frac{\sigma}{E_c} - \frac{\sigma_0}{E_c} \right) \quad (4-37)$$

$$\text{式中, } \sigma = \frac{S}{A_c} = \frac{HL_c}{A_c L}$$

$$\sigma_0 \approx \frac{S_0}{A_c} \approx \frac{H_0 L_c}{A_c L}$$

斜拉索因垂度的修正伸长量表示为

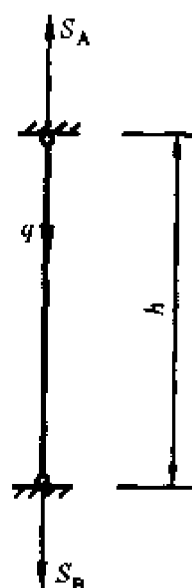


图 4-3 竖置拉索

$$\begin{aligned}\Delta_f &= \frac{q^2 L^2 L_c}{24} \left(\frac{1}{S_0^2} - \frac{1}{S^2} \right) \\ &= \frac{q^2 L^2 L_c}{24} \left(\frac{L^2}{H_0^2 L_c^2} - \frac{L^2}{H^2 L_c^2} \right)\end{aligned}$$

所以,斜拉索在弦方向的总伸长量可表示成

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_f$$

即

$$\Delta = \frac{L_c^2}{E_c A_c L} \left(H - \frac{q^2 L^5 E_c A_c}{24 L_c^3 H^2} \right) - \frac{L_c^2}{E_c A_c L} \left(H_0 - \frac{q^2 L^5 E_c A_c}{24 L_c^3 H_0^2} \right) \quad (4-38)$$

式中, L_c 为斜拉索的弦长; $E_c A_c$ 为斜拉索的轴向抗拉刚度; L 为斜拉索的水平投影长度。

引入参数

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{L_c^2}{E_c A_c L} \\ \beta &= \frac{q^2 L^5 E_c A_c}{24 L_c^3}\end{aligned}$$

则式(4-38)改写成

$$\Delta = \alpha \left(H - \frac{\beta^3}{H^2} \right) - \alpha \left(H_0 - \frac{\beta^3}{H_0^2} \right) \quad (4-39)$$

令 $H = k\beta$, $H_0 = k_0\beta$, 则得无量纲化的方程为

$$\frac{\Delta}{\alpha\beta} + \left(k_0 - \frac{1}{k_0^2} \right) = k - \frac{1}{k^2} \quad (4-40)$$

上式可用来研究斜拉索的张紧程度。图 4-4 表示 $k - \frac{1}{k^2}$ 随 k 的变化情况。可以看出, $k > 1.5$ 的范围可认为是属于张紧的拉索。

一般斜拉桥拉索的 k 值均在 3 以上。因此,忽略垂度所引起的非线性影响,按张紧钢索的固有频率方程来计算已足够精确。

2. 斜拉索的横向固有振动

图 4-5 所示为一倾斜的拉索及其坐标系。正如图示那样,坐

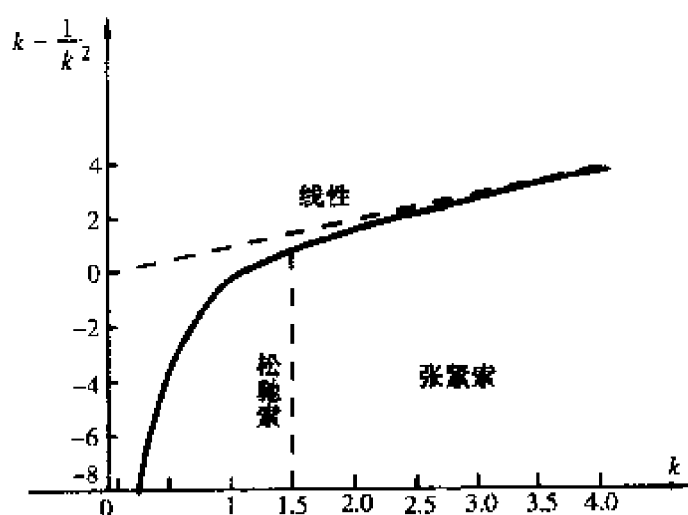


图 4-4 拉索的张紧程度

标原点设在左支承点 O , 而 x 轴取 OP 方向, 其法向作为 y 轴且朝下方为正, θ 和 l 分别为斜拉索的倾角和弦长。

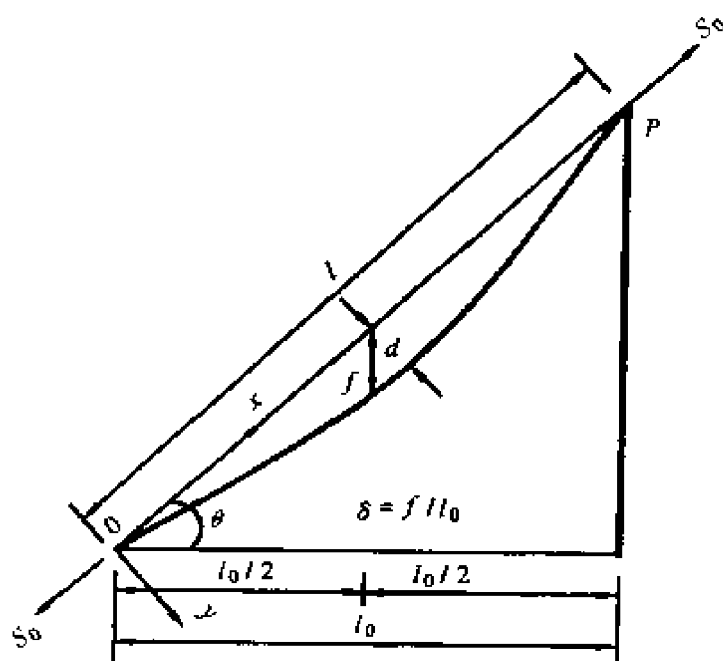


图 4-5 斜拉索的横向振动

分析时作以下几点假设:

(1) 垂跨比 $\delta = f/l_0$ 很小;

(2)拉索只在 xy 平面内振动,在 x 方向的运动很小可忽略不计;

(3)拉索的几何形状可用抛物线表示;

(4)拉索自重 在 y 方向为常量 q_x 。

斜拉索在恒载作用下的静平衡方程为

$$EI_c y^{(4)} - S_0 y'' - q_x = 0 \quad (4-41)$$

斜拉索作横向固有振动时,其动力平衡方程为

$$EI_c (y^{(4)} + \eta^{(4)}) - (S_0 + S)(y'' + \eta'') - q_x + m\ddot{\eta} = 0$$

利用式(4-41),并略去高阶微量项 $S\eta''$,得

$$EI_c \eta^{(4)} - S_0 \eta'' - S y'' + m\ddot{\eta} = 0 \quad (4-42)$$

式中, EI_c 为斜拉索的弯曲刚度; $\eta(x, t)$ 为由振动引起的 y 方向上的挠度; S_0 为图 4-5 中的斜拉索在弦 OP 方向上的拉力; $S(t)$ 为振动而引起的斜拉索拉力增量; m 为单位索长的质量。

根据前述假设 2 和 3,斜拉索的几何形状可表示为

$$y = \frac{4d}{l^2} x(l-x) \quad (4-43)$$

相当于令式(4-41)中 EI_c 为零后的解。式中, d 为斜拉索在 xy 坐标系下定义的垂度(图 4-5)。

将式(4-43)代入方程(4-42),可得

$$EI_c \frac{\partial^4 \eta(x, t)}{\partial x^4} - S_0 \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} + m\ddot{\eta}(x, t) = -\frac{8d}{l^2} S(t) \quad (4-44)$$

由式(4-4)可知,当斜拉索拉力 S_0 较小而垂度变得较大时,由振动引起的拉索拉力增量 $S(t)$,对一阶振型来说,其影响不可忽略。但对二阶或更高阶振型而言,即使斜拉索拉力 S_0 很小, $S(t)$ 的影响也是很小的,可以略去不计。因此,为简单起见,略去 $S(t)$ 的影响项,式(4-44)变为

$$EI_c \eta^{(4)}(x, t) - S_0 \eta''(x, t) + m\ddot{\eta}(x, t) = 0 \quad (4-45)$$

上式与式(4-11)完全相同。

设方程(4-45)的解为

$$\eta(x, t) = \varphi(x) q(t) \quad (4-46)$$

将上式代入式(4-45),并引进参数 ω^2 ,分离变量后,有

$$EI_c \varphi^{(4)}(x) - S_0 \varphi''(x) - \omega^2 m \varphi(x) = 0 \quad (4-47)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (4-48)$$

式(4-48),是单自由度体系的自由振动方程。式(4-47)的通解为

$$\varphi(x) = A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) + A_3 \sinh(\beta x) + A_4 \cosh(\beta x) \quad (4-49)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= (\zeta^4 + \gamma^4)^{1/2} - \zeta^2 \\ \beta^2 &= (\zeta^4 + \gamma^4)^{1/2} + \zeta^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-50)$$

$$\text{其中, } \zeta^2 = \frac{S_0}{2EI_c}, \gamma^4 = \frac{m\omega^2}{EI_c}$$

假定斜拉索两端固定,符合斜拉桥的一般实际情况。则由相应的边界条件得频率方程为

$$\begin{aligned} &2(\alpha l)(\beta l)[1 - \cos(\alpha l)\cosh(\beta l)] \\ &+ [(\beta l)^2 - (\alpha l)^2]\sin(\alpha l)\sinh(\beta l) = 0 \end{aligned} \quad (4-51)$$

上式与式(4-14)完全相同。说明了斜拉索横向振动时,不考虑附加索力影响的固有频率是确定的,与其在空间中所处的方位无关。工程中正是基于这一特点,给出了用振动法估算斜拉索拉力的测力方法,并设计了专门测试斜拉索索力的仪器。

4.2 用振动法估测斜拉索拉力的实用公式

斜拉桥(或用斜缆加劲的拱桥)等拉索体系桥梁的建造过程中,必须对拉索拉力进行测试并调整,以便对于拉索拉力和桥梁几何尺寸进行优化。工程中常用的方法是从测得的固有频率估算拉索拉力的振动方法,具有简单、快速等特点。由于拉索的固有频率不仅受拉索拉力的影响,而且还受拉索挠曲刚度、垂跨比和边界约束等影响。因此估算拉索拉力时必须考虑这些因素。

但是,要从式(4-51)精确求解出拉索的固有频率并非易事。

为了满足工程需要,本节着重介绍估算拉索拉力的实用公式。

4.2.1 频率方程的近似解

由于式(4-51)是超越方程,因此不能从测得的频率直接解出拉索的拉力。当拉索的动力特性与其弦的动力特性相似时,即无量纲参数

$$\xi = \sqrt{\frac{S_0}{EI}}l \quad (4-52)$$

很大时,则可引入下列无量纲参数

$$\eta_n = f/f_n^s \quad (4-53)$$

$$f_n^s = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{S_0}{m}} \quad (4-54)$$

式中, $f = \omega/2\pi$; f_n^s 为弦的第 n 阶固有频率理论值。将上述两式代入式(4-50),得

$$\alpha l = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2n\pi\eta_n}{\xi}\right)^2} - 1} \quad (4-55)$$

$$\beta l = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2n\pi\eta_n}{\xi}\right)^2} + 1} \quad (4-56)$$

再将上两式(4-55)、(4-56)代入式(4-51),得如下无量纲表达式

$$2n\pi\eta_n(1 - \cos\alpha l \cosh\beta l) + \xi \sin\alpha l \sinh\beta l = 0 \quad (4-57)$$

虽然式(4-57)仍是超越方程,但是,对于给定的 ξ 值,可用迭代法求得 η_n ,这里利用牛顿—雷夫宋法(Newton—Raphson)。迭代计算的初值可由式(4-58)~(4-61)给出。对于一阶或二阶振型,式(4-57)的近似解可表示如下

$$\eta_1 = \frac{\xi}{\xi - 2.2} \quad \xi \geq 17 \quad (4-58)$$

$$\eta_1 = 1.075 \sqrt{1 + \left(\frac{6.8}{\xi}\right)^2} \quad 6 \leq \xi \leq 17 \quad (4-59)$$

$$\eta_2 = \frac{\xi}{\xi - 2.2} \quad \xi \geq 60 \quad (4-60)$$

$$\eta_2 = 0.985 \frac{\xi}{\xi - 3.1} \quad 17 \leq \xi \leq 60 \quad (4-61)$$

式中, η_1 表示对一阶振型的近似公式; η_2 表示对二阶振型的近似公式。上述近似公式可用下述方法得到:

ξ 较大时, 式(4-57)的解 η_n 近似等于 1, 可令 $\eta_n = 1 + \Delta$, 代入式(4-57)并注意到 $2n\pi\eta_n/\xi \ll 1$, $\sinh \beta l \approx \cosh \beta l \gg 1$, 可得式(4-58)和式(4-60)。而式(4-61)则是通过调整系数使理论解和近似解之间相差最小得到的。

当 ξ 较小时, η_n 与轴向受拉梁的值类似。采用轴向受拉梁的静力等效抗弯刚度

$$EI' = EI_c (1 + \xi^2/4\pi^2)$$

并用上述调整系数的方法, 就可得到式(4-59)。图 4-6 所示为式(4-57)的精确解与近似解之间的比较, 两者非常一致, 其误差在 0.4% 范围内。

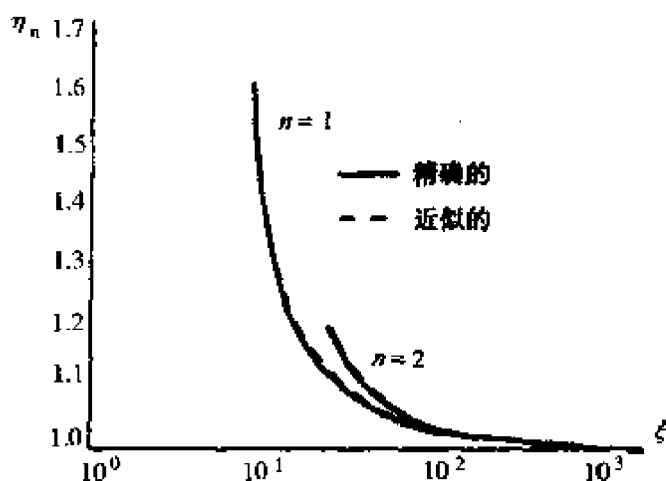


图 4-6 η_n 的精确解和近似解与 ξ 的关系

当 ξ 变小时, 式(4-57)的解 η_n 迅速增大, 很难获得其精确解。上述的公式不适应于小 ξ 的情况。

当 ξ 很小时, 拉索的特性与梁的特性相似, 可以引入另一无量纲参数

$$\varphi_n = f/f_n^B \quad (4-62)$$

$$f_n^B = \frac{\alpha_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m}} \quad (4-63)$$

式中, f_n^B 为两端固定梁的第 n 阶固有频率理论值, 其中, $\alpha_1 = 4.730$ 和 $\alpha_2 = 7.853$ 。

当斜拉索拉力接近于零 ($\xi = 0$) 时, $\varphi_n = 1$ 。把这些式子代入式(4-50), 则

$$\alpha l = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha_n^2}{\xi^2} \varphi_n\right)^2} - 1} \quad (4-64)$$

$$\beta l = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha_n^2}{\xi^2} \varphi_n\right)^2} + 1} \quad (4-65)$$

再将上两式代入式(4-51), 得无量纲方程为

$$2\alpha_n^2 \varphi_n (1 - \cos \alpha l \cosh \beta l) + \xi^2 \sin \alpha l \sinh \beta l = 0 \quad (4-66)$$

对给定的 ξ 和 φ_n , 可用 Newton-Raphson 等迭代法求解。其近似解可表示为

$$\varphi_1 = \sqrt{1 + \xi^2/42} \quad 0 \leq \xi \leq 8 \quad (4-67)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{1 + \xi^2/85} \quad 0 \leq \xi \leq 18 \quad (4-68)$$

式中, φ_1 表示对一阶振型的近似公式; φ_2 表示对二阶振型的近似公式。

通过用轴向受拉梁的静力等效抗弯刚度和调整系数建立的式(4-67)和式(4-68)与精确解误差最小, 如图 4-7 所示。从图可见, 对于一阶振型, $0 \leq \xi \leq 8$ 时, 对二阶振型, $0 \leq \xi \leq 18$ 时, 近似解与精确解吻合得很好, 其误差均在 0.4% 范围以内。

当拉索很长时, 用人工激励来获得一阶或二阶振型就比较困难, 此时必须使用稳态微振。在稳态微振中, 高阶振型通常起主要作用, 因而实际上要求的是相应于高阶振型的近似解。在这种情况下, ξ 取值很大, 通常认为 $\xi \geq 200$ 。因此, 可采用与式(4-60)相同但有足够精度的近似解

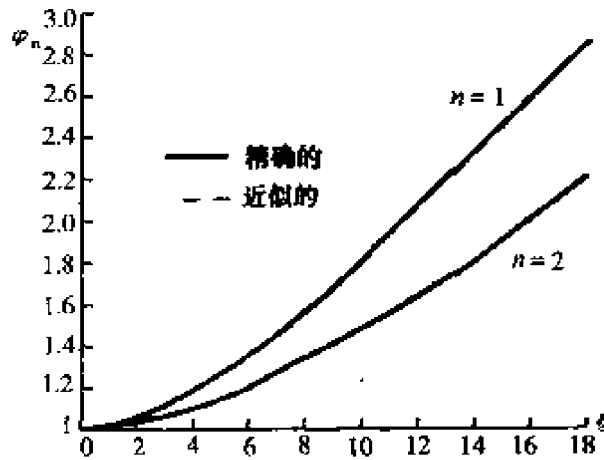


图 4-7 φ_n 的精确解和近似解与 ξ 的关系

$$\eta_n = \frac{\xi}{\xi - 2.2} \quad \xi \geq 200 \quad (4-69)$$

当拉索的垂度较大时,就必须检验近似解的精度及其适应性,特别是对一阶振型, Irvine 和 Caughey (1974) 通过考虑由振动引起的拉索拉力变化的影响,对垂度较大的拉索,给出了如下固有频率的理论计算公式(不计拉索的抗弯刚度):

$$f_n^c = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{8f}} \quad (4-70)$$

式中,

$$\lambda = \begin{cases} n\pi & (n = 2, 4, 6, \dots) \text{ 反对称振型时} \\ \frac{\lambda - 1g\lambda}{\lambda^3} = \Gamma_0 \text{ 的解} & \text{对称振型时} \end{cases} \quad (4-71)$$

$$\Gamma_0 = \frac{mgl}{128EA_c\delta^3\cos^5\theta} \quad (4-72)$$

其中, $\delta = f/l_0$ 为垂跨比。

这些公式表明,对反对称振型,拉索不发生伸缩,而只是改变形状,且其解与弦的解一致;对于对称振型,拉索伸缩的影响很显著,因而由振动引起的拉索拉力的变化不能忽略。对称振型的固有频率可由无量纲参数 Γ_0 确定,而 Γ_0 则为拉索的长度、垂度、重量、拉伸刚度及其倾角的函数。

为检验考虑弯曲刚度时拉索的这些特性,用有限元法对计及弯曲刚度影响的情况进行了参数计算,所得结果列于表 4-1 中。

在表 4-1 中, $\Gamma' = \sqrt{\Gamma_0}$ 及 ξ 均为常数,即 $\Gamma' = 1.0, \xi = 20.0$,而拉索的长度、垂跨比及其倾角则是变化的。 η_n 和 φ_n 的意义同前。计算结果表明,其解具有下述特性:

1) 只要 Γ' 和 ξ 为常数,则 η_n 和 φ_n 的值也几乎为常数,与拉索的长度、垂跨比及其倾角几乎无关;

2) 反对称振型的所有 φ_n 恒为 1,这表明对反对称振型,拉索的垂跨比和倾角的影响可忽略不计。

因此,反对称振型的近似解 η_2 和 φ_2 ,对任一垂度和倾角的拉索都是适应的。

关于对称振型的解, η_1 和 φ_1 的适应范围可由参数 Γ' 和 ξ 来确定。引入

$$\Gamma = \Gamma' \frac{0.31\xi + 0.5}{0.31\xi - 0.5} \quad (4-73)$$

则由上式可把 Irvine 式转换成

$$\frac{\frac{\pi\varphi_1}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\varphi_1}{2}\right)}{\left(\frac{\pi\varphi_1}{2}\right)^3} = \Gamma^2 = \left(\sqrt{\frac{mgl}{128EA_c\delta^3\cos^5\theta}} \frac{0.31\xi + 0.5}{0.31\xi - 0.5} \right)^2 \quad (4-74)$$

图 4-8 示出了 φ_1 和 Γ 之间的关系。其中,实线代表式(4-74)的解。由图可见,对不同的 ξ ,它与计算结果吻合很好。这表明,对不同的 ξ 和 Γ 值,拉索拉力与固有频率之间的关系可由式(4-74)准确地反映出来。

注意到式(4-74)是非线性的,而且拉索的两个拉力值将给出相同的一阶(对称振型)固有频率(如图 4-10)。因此,在 $\Gamma < 3$ 区域中,拉索垂度和拉索拉力变化的影响较大,拉索拉力对一阶固有频率特别敏感。这意味着固有频率微小的测量误差都会导致拉索拉力的较大偏差。对于二阶振型(一阶反对称振型),即使在 $\Gamma < 3$ 时,拉索垂度和由振动引起的拉索拉力改变对拉索拉力的影响也

斜拉索固有振动的有限元分析

表 4-1

$l(\text{m})$	θ	$EA_c(\text{kN})$	$m(\text{kg/m})$	$EI(\text{kN}\cdot\text{m}^2)$	$S_0(\text{kN})$	δ	η	τ_2	φ_1	φ_2
10.0	0°	1.58×10^5	0.008	7.223	28.89	0.0034	1.252	1.164	1.113	1.000
10.0	0°	1.568×10^5	0.016	11.47	45.85	0.0043	1.252	1.164	1.113	1.000
10.0	0°	3.136×10^5	0.016	9.096	36.39	0.0027	1.252	1.115	1.113	1.000
10.0	30°	1.568×10^5	0.016	6.557	26.25	0.0043	1.255	1.165	1.116	1.000
10.0	45°	1.568×10^5	0.016	5.734	22.93	0.0060	1.253	1.165	1.114	1.000
10.0	60°	1.568×10^5	0.016	4.548	18.19	0.0107	1.248	1.164	1.110	1.000
20.0	0°	1.568×10^5	0.016	42.50	42.48	0.0043	1.252	1.164	1.113	1.000
30.0	0°	1.568×10^5	0.016	125.20	60.09	0.0049	1.252	1.164	1.113	1.000

注: $\xi = 20.0$, $\Gamma' = 1.00$, $\Gamma = 1.175$

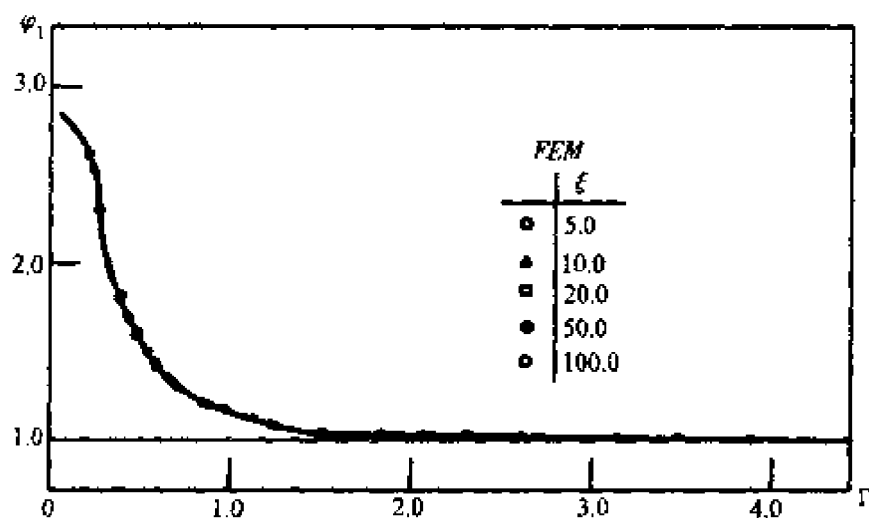


图 4-8 φ_1 与 Γ 的关系

是很小的,可略去不计,也就是说,拉索拉力对二阶固有振动频率的变化不那么敏感(如图 4-10)。当拉索垂度的影响较大即 Γ 值较小时,用二阶振型估算拉索拉力就较为理想。实用时对一阶振型的公式还必须限定其适用范围,这里设定为 $\Gamma \geq 3$,因为在此范围

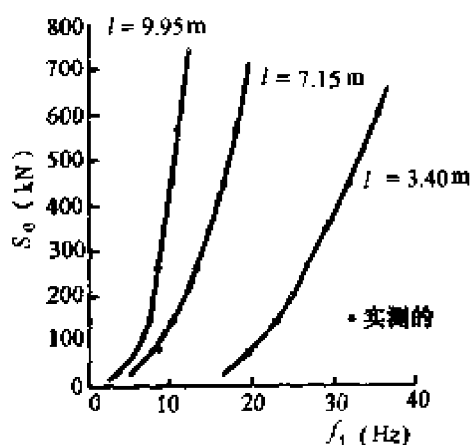


图 4-9 索力 S_0 与固有频率 f
(小 ξ) 的关系

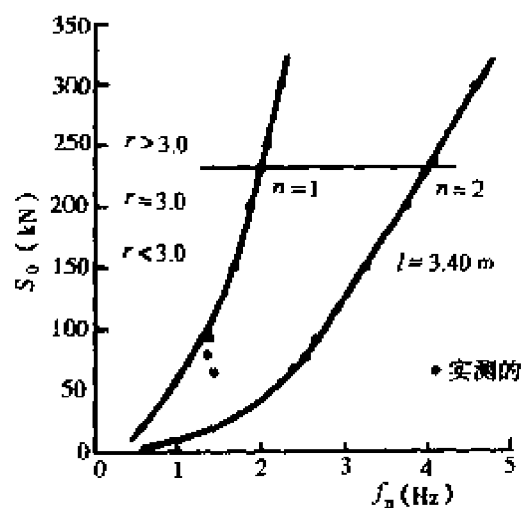


图 4-10 索力 S_0 与固有频率 f
(中等 ξ) 的关系

内,拉索垂度和倾角的影响即使对一阶振型也是小到可以忽略不计,且用人工以一阶振型激励拉索比以二阶振型激励更容易些。

辛克等人做的实验值及有限元法计算值与本节近似方法计算结果比较如图 4-9 至图 4-11 所示。

从以上三个图示的结果可见,用二阶振型或更高阶振型估算拉索拉力更有效,更准确。因此,振动法估测斜拉索拉力通常采用二阶固有振动频率来计算。

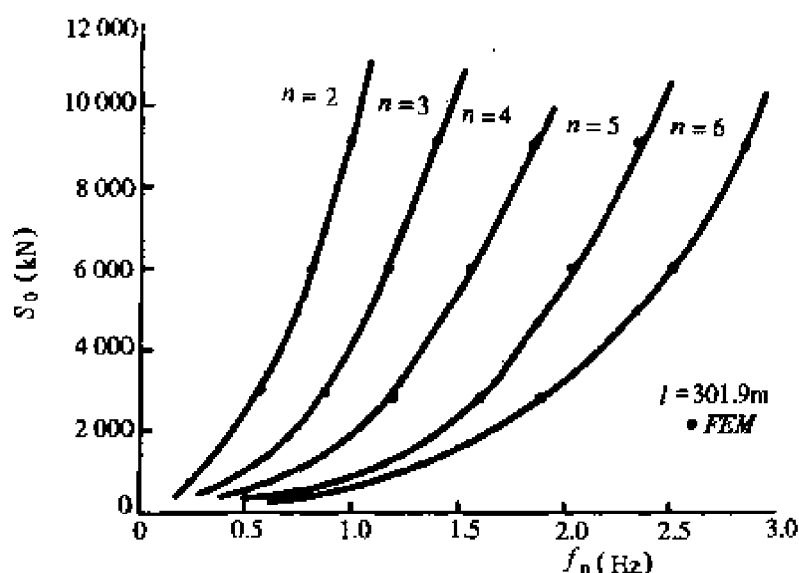


图 4-11 长拉索索力 S_0 与固有频率 f (大 ξ) 的关系

4.2.2 计算斜拉索拉力的实用公式

以拉索特性和设计条件计算参数 ξ 和 Γ 。当 $\Gamma > 3$ 时,用一阶振型的振动;当 $\Gamma < 3$ 时,用二阶振型的振动。若拉索很长,如大跨径斜拉桥上边的长拉索,用人工激励使其产生低阶振型比较困难,即使能用人工激励产生,也因振动周期长,测定其固有频率要花费很多时间。因此,对于这种拉索,用高频稳态微振模态较为理想。

考虑到上述条件,由式(4-58)~式(4-61)和式(4-67)~式(4-69)可导出下列用于估算斜拉索拉力的实用公式。

1)用一阶振型的固有频率时(垂度比较小的拉索, $\Gamma \geq 3$):

$$S_0 = 4m(f_1 l)^2 \left[1 - 2.20 \frac{c}{f_1} - 0.550 \left(\frac{c}{f_1} \right)^2 \right], \xi \geq 17 \quad (4-75)$$

$$S_0 = 4m(f_1 l)^2 \left[0.865 - 11.6 \left(\frac{c}{f_1} \right)^2 \right], 6 \leq \xi \leq 17 \quad (4-76)$$

$$S_0 = 4m(f_1 l)^2 \left[0.828 - 10.5 \left(\frac{c}{f_1} \right)^2 \right], 0 \leq \xi \leq 6 \quad (4-77)$$

2) 用二阶振型的固有频率时(垂度较大的拉索, $\Gamma \leq 3$):

$$S_0 = m(f_2 l)^2 \left[1 - 4.40 \frac{c}{f_2} - 1.10 \left(\frac{c}{f_2} \right)^2 \right], \xi \geq 60 \quad (4-78)$$

$$S_0 = m(f_2 l)^2 \left[1.03 - 6.33 \frac{c}{f_2} - 1.58 \left(\frac{c}{f_2} \right)^2 \right], 17 \leq \xi \leq 60 \quad (4-79)$$

$$S_0 = m(f_2 l)^2 \left[0.882 - 85.0 \left(\frac{c}{f_2} \right)^2 \right], 0 \leq \xi \leq 17 \quad (4-80)$$

3) 用高阶振型的固有频率时(很长的拉索, $n \geq 2$):

$$S_0 = \frac{4m}{n^2} (f_n l^2) \left(1 - 2.20 \frac{nc}{f_n} \right), \xi \geq 200 \quad (4-81)$$

以上各式中, f_1 、 f_2 、 f_n 分别为对斜拉索测量的一阶、二阶、 n 阶振型的固有频率;

$$c = \sqrt{\frac{EI_c}{ml^4}} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI_c}{m}};$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{ml}{128EA_c \delta^3 \cos^5 \theta} \frac{0.31\xi + 0.5}{0.31\xi - 0.5}};$$

$$\xi = \sqrt{\frac{S_0}{EI_c}} l;$$

EA_c 为拉索的拉伸刚度;

$\delta = f/l_0$ 为斜拉索竖向垂度与水平投影之比;

l 为斜拉索的弦长;

θ 为斜拉索的倾角。

由实用公式得出的结果与用拉索振动理论公式求得的结果非常

一致,其误差在 0.4% 的范围内。因此,斜拉索拉力可根据测量的固有频率直接计算得到。

虽然原则上可导出 $\xi \leq 200$ 时的高阶振型的实用公式,但是,当拉索很长而几乎不可能用人工激励获得其低阶振型时, ξ 很少低于 200。此外, $\xi \leq 200$ 时,推导高阶振型的实用公式将变得很复杂,原因是不可避免要根据 ξ 和 n (振型阶数) 的值划分公式的适用范围。只要 $\xi \geq 200$ 时,则对任何 ξ 值和 n 值,都可用式(4-81)来计算。

4.3 斜拉索的自激共振

在工程实际中,对已建和在建的斜拉桥的观测表明,在无风或风荷载很小的情况下,个别拉索有时会发生十分剧烈的横向振动,而这种振动十分有害,可能会造成拉索根部的疲劳破坏。实验研究表明,由于桥面振动而激发的拉索横向振动的频率接近于桥面某一阶自振频率的一半时,拉索将可能产生自激共振现象。斜拉桥的拉索和桥面的这种耦合振动特性,显然是线性振动理论无法解释的。因此,本节首先用两自由度非线性简化分析模型,研究自激共振的机理,然后介绍斜拉索自激共振的分析方法。

4.3.1 两自由度自激共振模型

为了分析斜拉桥拉索与桥面耦合振动的机理,我们将拉索的振动问题简化为一个两自由度的非线性振动体系,如图 4-12 所示。

设拉索质量聚集为一集中质量 M_1 , 在初始索力 S_0 作用下,其长度为 $2l$,索的抗拉刚度为 EA_c ,不计抗弯刚度 EI_c 的

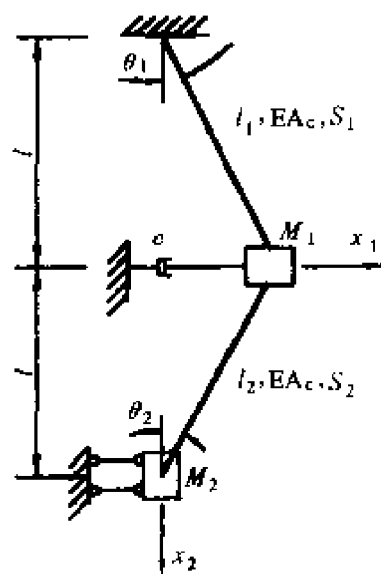


图 4-12 拉索非线性振动的两自由度模型

影响。桥面简化为另一较大的集中质量 M_2 , 并限制 M_2 只可以发生竖向振动, 并不计桥面加劲梁的抗弯作用。空气的阻尼假设为粘性阻尼 c 。

尽管这一模型显得十分粗糙, 但是它有助于揭示斜拉索与桥面耦合振动的一些特性。

设 x_1 和 x_2 均取 M_1 和 M_2 的静平衡位置为坐标原点, 由达朗伯原理, 可写出该体系的固有振动方程为

$$\left. \begin{aligned} S_1 \sin \theta_1 + S_2 \sin \theta_2 + M_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 &= 0 \\ S_2 \cos \theta_2 + M_2 \ddot{x}_2 - M_2 g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-82)$$

由几何关系, 显然有

$$\left. \begin{aligned} l^2 + x_1^2 &= (l + \Delta l_1)^2 = l_1^2 \\ (l + x_2)^2 + x_1^2 &= (l + \Delta l_2)^2 = l_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-83)$$

整理上式, 并略去高阶微量 $(\Delta l_1)^2$ 和 $(\Delta l_2)^2$ 项, 得两段拉索分别伸长

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{x_1^2}{2l} \\ \Delta l_2 &= x_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2l} \end{aligned} \right\} \quad (4-84)$$

考虑到振动是小位移的, 有

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{x_1}{l_1} \approx \frac{x_1}{l} \\ \cos \theta_1 &\approx 1 \\ \sin \theta_2 &= \frac{x_1}{l_2} \approx \frac{x_1}{l} \\ \cos \theta_2 &\approx 1 \end{aligned}$$

振动后, 索力也发生了变化, 分别为

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\approx S_0 + \Delta S_1 = S_0 + \frac{EA_c \Delta l_1}{l} \\ S_2 &= S_0 + \Delta S_2 = S_0 + \frac{EA_c \Delta l_2}{l} \end{aligned} \right\} \quad (4-85)$$

将以上各式分别代入方程(4-82),整理得拉索两自由度非线性固有振动方程为

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + 2S_0 \frac{x_1}{l} + \frac{EA_c x_1^3}{l^3} + \frac{EA_c x_1 x_2}{l^2} + \\ \frac{EA_c x_2^2 x_1}{2l^3} = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + EA_c \left(\frac{x_2}{l} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2l^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-86)$$

上式中,假设索力初始值 $S_0 = M_2 g$ 。

在方程(4-86)中,若不考虑非线性项,则其解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是独立的两种单自由度线性振动体系,各自有其自己的固有频率 ω_1 和 ω_2 及相应的振型。然而,二阶项和三阶项的存在决定了该体系的非线性性质。虽然体系的结构参数并未显含时间 t ,但由于 M_2 的振动将导致拉索的拉力随时间变化,即拉索相当于受到了刚度不断变化的回复力的作用。因此, M_1 相当于受到某特定参数引起的自激激励。正是 M_1 在水平方向上所承受的回复力的刚度变化,使得 M_1 的横向振动和 M_2 的竖向振动发生耦合。根据二阶非线性系统的内共振性质,可以预料,当 M_1 的局部振动频率 ω_1 接近 M_2 的局部振动频率 ω_2 的一半时, M_2 的竖向振动将激发 M_1 在水平方向上的大幅度振动。由于上述原因,我们将 M_1 看作是承受自激激励的振子,将 M_1 和 M_2 在 $\omega_1 \approx 0.5\omega_2$ 时所发生的共振看作是自激共振。

引入以下参数

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2S_0}{M_1 l}, \zeta = \frac{c}{2M_1 \omega_1}, \alpha_1 = \frac{EA_c}{M_1 l^2}, \beta_1 = \frac{EA_c}{M_1 l^3}; \\ \omega_2^2 &= \frac{EA_c}{M_2 l}, \alpha_2 = \frac{EA_c}{2M_2 l^2}, \end{aligned}$$

方程(4-86)变换成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta\omega_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_1 x_2 + \beta_1 x_1^3 + 0.5\beta_1 x_1 x_2^2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_2 (x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-87)$$

上式中,若认为 x_2 与 x_1 相比是较小量,可以略去 x_2^2 项,使方程进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + \alpha_1x_1x_2 + \beta_1x_1^3 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2x_2 + \alpha_2x_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-88)$$

数值解结果表明,当 $\omega_1 \approx 0.5\omega_2$ 时, M_1 和 M_2 的振动发生强烈耦合。当给 M_1 一个初始小扰动后,则 M_1 的振动受 M_2 振动的激励而加剧,以致于 M_1 的最大振幅远远高于其所受到的初始扰动。在无阻尼的情况下, M_1 和 M_2 的振动具有“拍”的特征,即其振幅分别随时间呈周期性变化,此消彼长,表明能量在两个自由度之间发生转移,但系统的总能量并不改变。同时数值解也表明了被激励的自由度 x_1 所达到的最大振幅与其初始扰动基本无关,但受 M_2 的初始扰动耦合影响较大。

实际上,斜拉桥的拉索与空气间存在着一定的阻尼,而阻尼对系统的动力特性有较大影响。数值计算表明,在有阻尼系统中不但存在两个自由度间能量的转移,也同时存在能量的耗散。虽然很小的阻尼未必能显著减小被激励自由度 M_1 的最大振幅,但能使被激励振子的振动很快衰减。值得重视的是, M_1 振子由于阻尼作用而消耗的能量还包括从 M_2 处所吸收的能量。

4.3.2 斜拉索的自激共振分析

1982年, Kovacs 第一次用自激振动来说明拉索振动的机理。

压杆在受到周期变化的轴向动荷载作用下的动力失稳就是一种自激共振现象。在斜拉桥中,拉索的上端锚固在索塔上,下端则与桥面相连接,当桥面以桥梁总体弯曲基频 f_b 作简谐振动时,斜拉索以 $f_c = 0.5f_b$ 的频率作横向振动与之相适应,从而发生耦合振动,如图 4-13 所示。这里假设拉索两端为铰结,不计抗弯刚度 EI_c 的影响。

若忽略斜拉索的微小垂度和阻尼的影响,拉索的横向振动可表示为

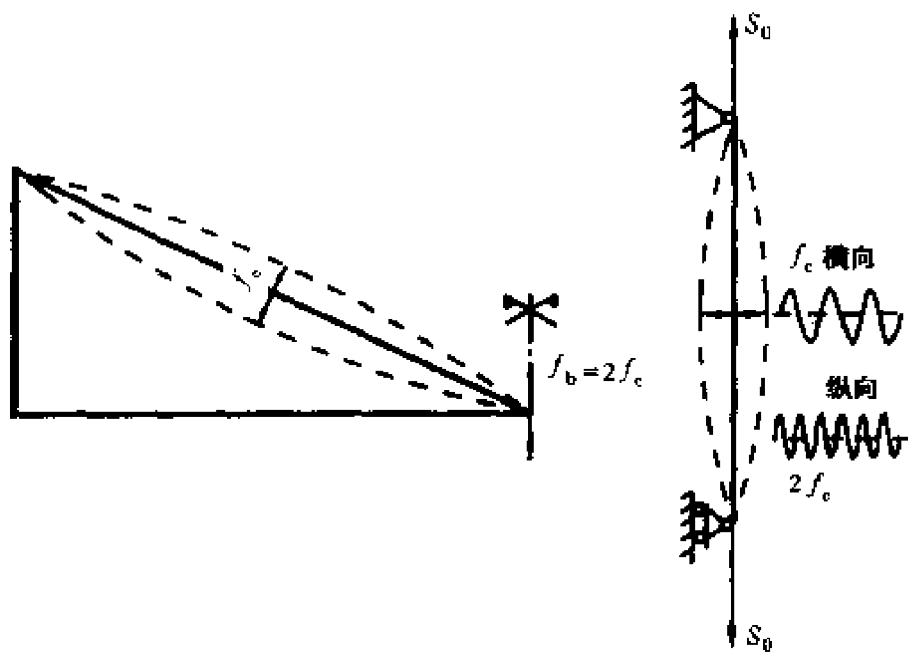


图 4-13 斜拉索的自激共振

$$y(x, t) = Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin(2\pi f_c t) \quad (4-89)$$

索力将以频率 $2f_c$ 发生周期性的变化,其增量为

$$\Delta S(t) = \Delta S_{\max} \sin(4\pi f_c t)$$

振动频率与桥面相同。这一索力变化将在拉索中引起随时间变化的横向荷载增量

$$\Delta q(x, t) = -\Delta S(t) y''(x, t) \quad (4-90)$$

将式(4-89)代入上式,得

$$\begin{aligned} \Delta q(x, t) &= \Delta S_{\max} \sin(4\pi f_c t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin(2\pi f_c t) \\ &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 Y_0 \Delta S_{\max} \frac{1}{2} [\cos(2\pi f_c t) - \cos(6\pi f_c t)] \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned}$$

式中,括号中的第一项相当于一个与速度成正比的负阻尼项,因为

$$\dot{y} = (2\pi f_c) Y_0 \cos(2\pi f_c t) \sin \frac{\pi x}{l}$$

括号中的第二项只是一个修正项,可略去不计。于是,拉索振动方程可近似地写成

$$m\ddot{y} - S_0 y'' = \Delta q(x, t) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\Delta S_{\max}}{4\pi f_c} \dot{y}$$

$$\text{即} \quad m\ddot{y} - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\Delta S_{\max}}{4\pi f_c} \dot{y} - S_0 y'' = 0 \quad (4-91)$$

将上式与带阻尼的拉索振动方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - S_0 y'' = 0$$

比较后,得负阻尼系数

$$c = - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\Delta S_{\max}}{4\pi f_c} \quad (4-92)$$

注意到拉索的基频

$$f_c = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{S_0}{m}}$$

相应的对数衰减率

$$\delta = \frac{c}{2mf_c} = - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\Delta S_{\max}}{S_0} \right) \quad (4-93)$$

由式(4-93)可见, $\frac{\Delta S_{\max}}{S_0}$ 值愈大,等效的负阻尼也愈大。

当 $f_b = 2f_c$ 时,发生自激共振时的解将取决于拉索本身的初始阻尼是否能够消耗由桥面支承点所输入的负阻尼能量。求解方程(4-91)可得拉索横向动位移为

$$y = Y_0 \sin \frac{\pi x}{l} \left[\exp \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta S_{\max}}{S_0} f_c t \right) \sin(2\pi f_c t) + \cdots \right] \quad (4-94)$$

此式表示一个发散的不稳定自激振动。

当桥面的激励频率 f_b 并不正好是 $2f_c$ 时,也会出现不稳定现象,其不稳定区随 $\frac{\Delta S_{\max}}{S_0}$ 的增加而扩大。因拉索中实际存在着阻尼,相应的有阻尼强迫振动方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} - S_0 y'' = \Delta q_m \sin \frac{\pi x}{l} \cos 2\pi f t \quad (4-95)$$

式中,右端激励力项是由式(4-90)决定的横向荷载增量。

按照强迫振动原理,可解得共振时最大振幅值为

$$Y_0 < \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{f^2}{f_c^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \frac{f^2}{f_c^2}}} \frac{\Delta q_m}{S_0} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \quad (4-96)$$

式中, δ 为拉索阻尼相应的对数衰减率; f 为桥面激励频率。

由式(4-90)可知

$$\Delta q_m = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 Y_0 \frac{\Delta S_{\max}}{2}$$

于是,共振区的判别条件为(图 4-14)

$$\frac{\Delta S_{\max}}{S_0} > 2 \sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_c^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \frac{f^2}{f_c^2}} \quad (4-97)$$

然而,在实际斜拉桥中的拉索并不像上面所简化的那样受到一个周期变化索力 $\Delta S(t)$ 的作用,而是一种支承激励。拉索的振动和作为支承点的索塔和桥面的振动是相互牵制的。如果结构振动不发散,拉索的横向振动也不可能出现一般自激共振所具有的发散现象,而是一种限幅的自激共振。在共振区内,拉索将发生较大振幅的横向振动。

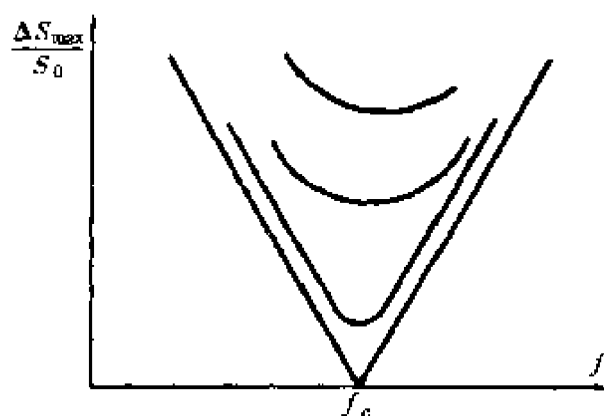


图 4-14 拉索自激共振的判别

拉索的横向振幅和其支承端点的纵向振幅之间存在下列关系

$$\Delta l = 2A_b = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 A_c^2 \cdot \frac{l}{2}$$

式中, A_c 为拉索的横向振幅; A_b 为拉索两端即桥面和桥塔之间沿

拉索方向的相对纵向振幅。于是,有

$$A_c = \frac{2}{\pi} \sqrt{2A_b l} \quad (4-98)$$

或写成无量纲形式

$$\frac{A_b}{l} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{A_c}{l} \right)^2 \quad (4-99)$$

例 4.3.1 斜拉桥的主跨径 $L = 400\text{m}$, 最长的外索 $l \approx 200\text{m}$, 如果桥面在任意动荷载下发生了振动, 使拉索两端的相对纵向振动具有 2mm 的振幅。即

$$\frac{A_b}{l} = \frac{0.002}{200} = 0.00001$$

由式(4-99), 得

$$\frac{A_c}{l} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{A_b}{l} \right)} = 0.0028$$

即

$$A_c = 0.0028 \times 200 = 0.57\text{m}$$

拉索横向振动的双振幅将有 1.14m , 这是不容忽视的强烈振动。当相邻两根拉索正好发生反向振动时, 就有可能发生如法国布鲁东桥那样的拉索相碰现象。

4.4 斜拉索的减振

在结构动力学中, 我们已经熟知单自由度系统振动的动力放大系数受粘性阻尼的影响极大(如图 1-28 所示), 因此, 消除或减小斜拉索振动的主要方法是在拉索和桥面的连接端安装阻尼器, 如图 4-15 所示。为了分析问题方便, 根据斜拉索柔性大的特点, 假设斜拉索两端为铰结, 同时略去拉索垂度的影响, 并不计拉索的结构阻尼。在距桥面 $e = \epsilon l$ 处设置一附加粘性阻尼器, 阻尼系数为 c , 拉索的抗弯刚度为 EI_c , 单位长度的质量为 m 。在拉索的跨中受

有一简谐激振力 $p \cos \Omega t$ 作用。

拉索的横向振动方程为

$$EI_c \eta^{(4)} - S_0 \eta'' + m \ddot{\eta} + c \dot{\eta} \delta(x - a) = P \cos \Omega t \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (4-100)$$

式中, $a = l - e = l - \epsilon l = (1 - \epsilon)l$,

$\epsilon \ll 1$; S_0 为拉索初始索力值。

设横向振动位移

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入式(4-100), 得

$$\sum_{n=1}^N \left[EI_c \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 q_n \sin \frac{n\pi x}{l} + S_0 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 q_n \sin \frac{n\pi x}{l} + m \ddot{q}_n \sin \frac{n\pi x}{l} + c \dot{q}_n \sin \frac{n\pi x}{l} \delta(x - a) \right] = P \cos \Omega t \delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

将上式两边同乘以 $\sin \frac{k\pi x}{l}$, 并对 x 自 0 至 l 积分, 得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k(t) + \frac{2c}{ml} \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} + \omega_k^2 q_k(t) &= Q_k(t) \\ (k = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (4-101)$$

式中

$$\omega_k^2 = \frac{EI_c \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 + S_0 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2}{m}$$

$$Q_k(t) = \frac{2P \sin \frac{k\pi}{2}}{ml} \cos \Omega t$$

式(4-101)为 N 阶常系数线性微分方程组, 可借助于计算机求其数值解。

当只取一阶振型分析时, 式(4-101)简化为

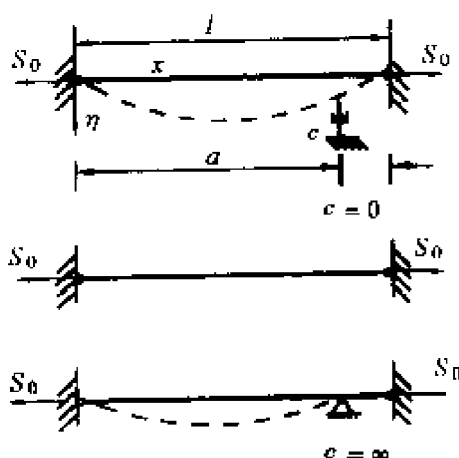


图 4-15 拉索的减振阻尼器

$$\ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = Q_1(t) \quad (4-102)$$

式中,等效阻尼比 ζ_1 为

$$\zeta_1 = \frac{c}{ml\omega_1} \sin^2 \frac{\pi a}{l} \quad (4-103)$$

因而可得拉索的动力放大系数为

$$\mu_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + 4\zeta_1^2 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}}} \quad (4-104)$$

当 $c=0$ 时,即不存在阻尼,上式变为

$$\mu_d(c=0) = \left| \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}} \right| \quad (4-105)$$

当 $c \rightarrow \infty$ 时,说明附加阻尼器相当于固定支座,即相当于将索长缩短。此时,有固有频率

$$\hat{\omega}_1^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 EI_c + S_0 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{m} \quad (4-106)$$

为了便于分析比较,假设 EI_c 的影响略去不计,则

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1^2 &= \frac{S_0}{m} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{S_0}{m} \left(\frac{\pi}{l - \epsilon l}\right)^2 \\ &= \frac{S_0}{m} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - \epsilon}\right)^2 = \omega_1^2 \left(\frac{1}{1 - \epsilon}\right)^2 \end{aligned} \quad (4-107)$$

式中, $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S_0}{m}}$ 为原索长时的固有频率。

相应的放大系数为

$$\mu_d(c \rightarrow \infty) = \left| \frac{1}{1 - (1 - \epsilon)^2 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}} \right| \quad (4-108)$$

最优化的 c 将使动力放大系数的峰值位于 $c=0$ 和 $c \rightarrow \infty$ 两组曲线的交点上,如图 4-16 所示。为此,联立式(4-105)和式(4-108),显然有一组方程

$$\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}} = \frac{1}{(1 - \epsilon)^2 \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - 1}$$

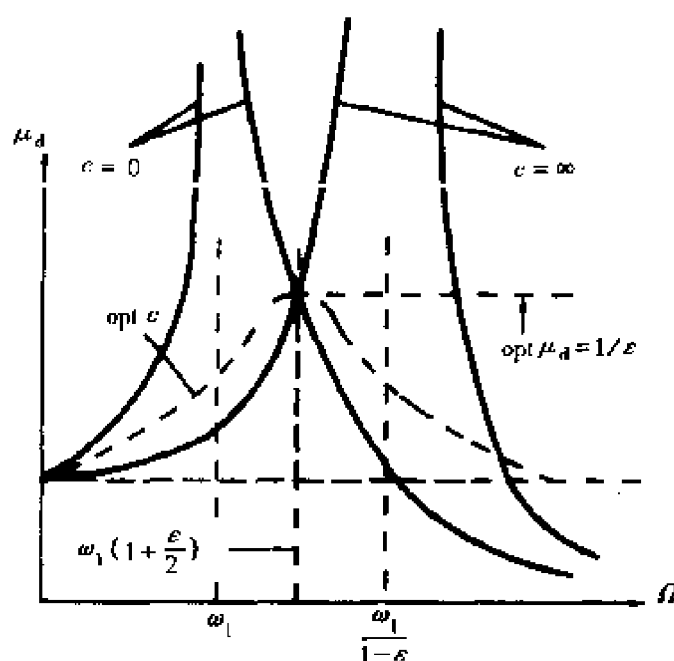


图 4-16 优化的动力放大系数

解之得

$$\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} = \frac{2}{2 - 2\epsilon + \epsilon^2} \approx \frac{1}{1 - \epsilon}$$

即

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \epsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon \quad (4-109)$$

将 $\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} = \frac{2}{2 - 2\epsilon + \epsilon^2}$ 代入式(4-105)或式(4-108),得

$$\mu_d = \left| \frac{2 - 2\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon^2 - 2\epsilon} \right| \approx \frac{1}{\epsilon} \quad (4-110)$$

在桥面附近处设置阻尼器后,其阻尼系数一般既不为零也不会是无穷大。此时,假设外激励力的频率 Ω 接近于拉索的一阶固有频率时,有

$$\mu_d = \frac{1}{2\xi_1} = \frac{1}{\epsilon}$$

因而,有

$$\zeta_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad (4-111)$$

相应的对数衰减率

$$\delta = 2\pi\zeta_1 = \pi\varepsilon \quad (4-112)$$

阻尼器的阻尼系数可写成

$$c = \omega_1 ml \zeta_1 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi a}{l}} \quad (4-113)$$

注意到

$$\sin^2 \frac{\pi a}{l} = \sin^2 \pi(1 - \varepsilon) = \sin^2 \varepsilon \pi \approx (\varepsilon \pi)^2$$

和

$$m = \frac{S_0 \pi^2}{l^2 \omega_1^2}$$

分别代入式(4-113),得

$$c = \frac{S_0}{2\varepsilon \omega_1 l} \quad (4-114)$$

因此,可根据拉索拉力 S_0 ,一阶振动频率和近桥面的阻尼器相对位置 εl ,来确定阻尼器的阻尼系数,实现对斜拉索的减振。

对安装阻尼器的位置和阻尼值进行优化设计比较,列于表 4-2 中。

阻尼值优化设计

表 4-2

ε	1/10	1/20	1/50
opt. δ	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{50}$
opt. ζ	0.05	0.025	0.01

注:opt.——最优的

可见,阻尼器的位置愈靠近端部(即 ε 愈小),所需的阻尼比可愈小,但放大倍数较大,即减振效果要差些。

在实际工程中还有把拉索从外索到内索相互连接起来,如图 4-17,通过连接件的伸缩来消能,同时,利用各根拉索固有频率不同所产生的干扰效应来传递能量以达到抑制振幅的目的。但因其

影响大桥景观,一般较少使用。

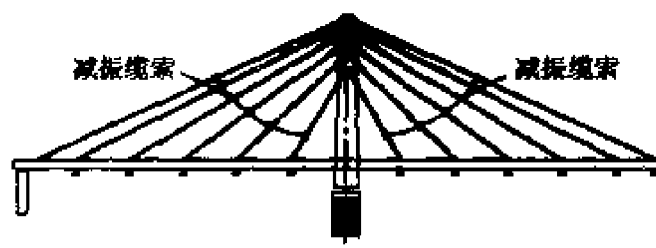


图 4-17 斜拉索的串联

此外,对斜拉索在阵雨条件下发生比晴天时更大的风致振动现象,初步研究认为是由于雨水沿拉索下流时的水道改变了拉索原有的圆形截面,造成一种类似结冰电缆驰振的机制。构造上可通过在拉索表面加上平行的突出条的措施将水道隐蔽起来,以使振动受到抑制。但是,这方面的振动机理尚有待于更深入的研究。

4.5 斜拉桥的固有振动

斜拉桥的力学本质是利用斜拉索作为桥面的弹性支承。随着跨径的增大,斜拉桥的拉索布置从最初的少数几根稀索发展成目前普遍使用的便于施工的密索体系,其力学性能也从以受弯为主的多跨弹性支承连续梁演变成一种拟桁架体系。

斜拉桥的支承方式有许多种,最基本的有两大类:

(1)柔性主梁通过双索面挂在刚架形的索塔上,主梁和索塔在塔位处不连接,形成一种飘浮体系。根据抗震的要求,还可以在主梁的两端(或一端)或塔位处设置水平方向的弹性支座。

(2)刚性的箱形截面连续主梁与独柱支承的单索面所组成的体系。

斜拉桥中不同的支承方式和索型布置都会对其动力特性带来影响。用有限元法编制的空间动力分析程序,如通用的 SAP 程序可以方便和足够精确地计算出所需的桥梁各阶频率和相应的振型。由于桥梁一般都具有纵向对称轴,面内和面外的振型会自动分开。如果桥梁是左右对称的,还可以利用对称性进行半桥分析

以减小自由度数目。

下面以常用的对称飘浮体系为对象来介绍斜拉桥的基本动力特性。

图 4-18 表示一座飘浮体系斜拉桥的前几阶振型。

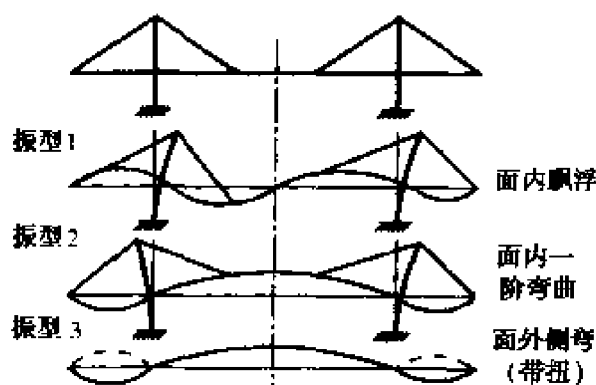


图 4-18 飘浮体系斜拉桥的固有振型

对于斜拉桥的动力分析,最重要的是三个振型,即:①反对称飘浮振型;②一阶对称竖向弯曲振型;③一阶对称扭转为主振型。其中①、②对地震反应最为重要;②、③是风振中主要考虑的振型;对于车辆振动反应来说,一阶弯曲振型是基本的。

振型的序列视桥宽而不同。宽度较小的斜拉桥,以侧向弯曲为主的振型在按频率大小的序列中将提前。扭转为主的对称振型一般要出现在二阶甚至在三阶侧向弯曲振型之后,视抗扭刚度的大小而定。

4.5.1 飘浮体系固有振动频率的近似计算

飘浮体系斜拉桥的第一阶反对称振型(面内)具有长周期的隔震性能。这一振型的特点是:主梁在纵向水平方向作稍有反对称弯曲的刚体运动,并带动索塔的弯曲振动。主梁的水平振动位移与塔顶的水平位移相近,其相应的周期要比一阶弯曲振动的周期大好多倍,反映出这种体系的“飘浮”振动特性。在纵向水平地震力的作用下,这一振型的贡献占绝对优势。从水平地震力的传力途径来看,主梁地震力的大部分将主要通过最外几对倾角最小的

拉索传入塔顶,并由此引起索塔中,特别是塔根控制截面的强大地震反应。

由于塔顶振动位移与主梁刚体位移相近,可把主梁的质量集中堆聚于塔顶形成一个图 4-19b 所示的替代模型,将能够近似地反映出作为飘浮体系的主要控制部分——索塔的振动性能。如果进一步将索塔的自身质量也按常规的方法换算成等效质量堆聚到塔顶,就可用一个简单的单质点振子模型来代替(图 4-19c)。

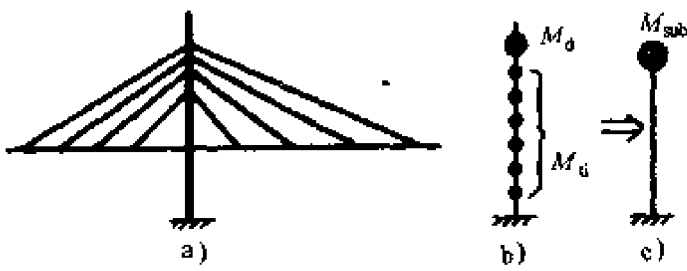


图 4-19 漂浮体系斜拉桥的简化模型

于是,漂浮体系的基本振动周期可写成

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M_{sub}}{K_T}} \tag{4-115}$$

式中 M_{sub} ——塔顶处的全桥集中替代质量;

K_T ——塔顶处的抗推刚度,可考虑索塔变截面的影响。

表 4-3 中列出天津永和斜拉桥不同计算模型的飘浮体系振动周期。可见,简化模型具有很好的精度。

漂浮体系振动周期计算值			表 4-3
模型种类	实桥体系	替代多质量模型	单质点振子
周期(s)	5.86	5.71	5.78

4.5.2 铅垂平面内弯曲基频的近似计算

1. 变形能

考察图 4-18 所示的斜拉桥的一阶铅垂平面内的弯曲振型,振动时的变形能系由主梁和索塔的弯曲变形和拉索的伸缩变形所组

成。

1) 主梁的弯曲变形能

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_L EI_b \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4-116)$$

式中, $\eta(x)$ 为主梁弯曲位移; EI_b 为主梁的抗弯刚度。

2) 索塔的弯曲变形能

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_H EI_T \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (4-177)$$

式中, $\xi(z)$ 为索塔的弯曲位移(水平方向); EI_T 为索塔的抗弯刚度(纵桥方向)。

3) 拉索的变形能

考察图 4-20 所示的一根拉索。

拉索的伸长可表示为

$$\Delta L_c = \frac{\Delta S L_c}{E_c A_c} = \eta_c \sin \alpha_c$$

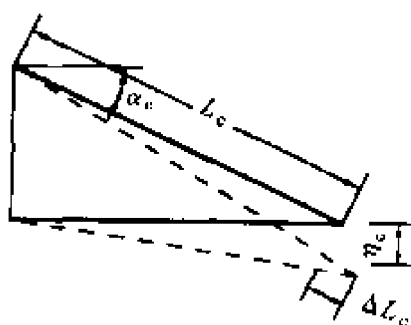


图 4-20 斜拉索的变形

式中, ΔS 为拉索索力的增量; L_c 为索长; α_c 为拉索的倾角; $E_c A_c$ 为拉索的拉伸刚度。于是有

$$\Delta S = \eta_c \frac{E_c A_c}{L_c} \sin \alpha_c$$

变形能

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2} \sum_{c=1}^N \Delta S \Delta L_c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{c=1}^N \frac{E_c A_c \eta_c^2 \sin^2 \alpha_c}{L_c} \end{aligned} \quad (4-118)$$

由于体系的振动, 使拉索的倾角发生变化, 索力也相应地发生周期性的变化, 索力的垂直分量的变化可表示为

$$\begin{aligned} \Delta S_v &= \Delta S \sin(\alpha_c + d\alpha) - \Delta S \sin \alpha_c \\ &\approx \Delta S \cos \alpha_c d\alpha \end{aligned}$$

由几何关系

$$da = \frac{\eta \cos \alpha_c}{L_c}$$

于是

$$\Delta S_V = \Delta S \frac{\cos^2 \alpha_c}{L_c} \eta$$

拉索二次变形所做的功为

$$V_4 = \sum_{e=1}^N \int_0^{\eta_c} \Delta S_V d\eta = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \Delta S \frac{\cos^2 \alpha_c}{L_c} \eta_c^2 \quad (4-119)$$

2. 动能

斜拉桥在发生一阶铅垂平面内的弯曲振动时,其动能为主梁、索塔和拉索的动能之和。

1) 主梁的动能

$$T_b = \frac{1}{2} \omega_b^2 \int_L m_b \eta^2 dx \quad (4-120)$$

式中, m_b 为主梁单位跨长的质量。

2) 索塔的动能

$$T_T = \frac{1}{2} \omega_b^2 \int_H m_T \xi^2 dz \quad (4-121)$$

式中, m_T 为索塔单位长度的质量。

3) 拉索的动能

斜拉索的动能由竖向振动和水平振动两个方向的速度产生。设斜拉索在索塔锚固点处的竖向速度为零,在主梁处的竖向速度为 $v_{cv} = \eta_c \omega_b$, 则斜拉索上任一点处的竖向速度为

$$v_{cv}(s) = \frac{s}{L_c} v_{cv} = \frac{s}{L_c} \eta_c \omega_b$$

相应的动能为

$$T_{cl} = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} m_c v_{cv}^2 ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_c \eta_c^2 \omega_b^2 L_c \right) \quad (4-122)$$

同理,斜拉索在主梁处的水平速度为零,在索塔锚固点处的水平速度为 $v_{ch} = z_c \omega_b$, 其中, z_c 为塔基至拉索锚固点的高度。则拉索上任一点处的水平速度为

$$v_{CH}(s) = \frac{s}{L_c} v_{CH} = \frac{s}{L_c} z_c \omega_b$$

相应的动能为

$$T_{c2} = \frac{1}{2} \int_0^{L_s} m_c v_{CH}^2 ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_c z_c^2 \omega_b^2 L_c \right) \quad (4-123)$$

根据瑞莱法,斜拉桥竖向挠曲频率的近似计算公式可写成

$$\omega_b^2 = \frac{\left[\int_L EI_b (\eta'')^2 dx + \int_H EI_T (\xi'')^2 dz + \sum_{c=1}^N \frac{E_c A_c \sin^2 \alpha_c}{L_c} \eta_c^2 + \sum_{c=1}^N \Delta s \frac{\cos^2 \alpha_c}{L_c} \eta_c^2 \right]}{\int_L m_b \eta^2 dx + \int_H m_T \xi^2 dz + \frac{1}{3} \sum_{c=1}^N m_c L_c (\eta_c^2 + z_c^2)} \quad (4-124)$$

在上式的各部分能量中,拉索的变形能是最主要的,主梁和索塔的弯曲变形能相对较小,索力的二次影响也很小,可以忽略不计。在动能中,拉索的质量 m_c 相对于主梁 m_b ,是一个微小量,可以合并到主梁中去考虑,并近似地记作常数 m 。索塔的动能也是个少量,略去不计。如果仅取主要的项,弯曲频率公式可简化为

$$\omega_b^2 = \frac{\sum_{c=1}^N K_c \eta_c^2}{m \int_L \eta^2(x) dx} \quad (4-125)$$

式中, $K_c = \frac{E_c A_c \sin^2 \alpha_c}{L_c}$, 为拉索的弹性常数。

设 $\eta(x) \approx \eta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$, 并且将 K_c 分摊到索距 λ_c 范围内形成一个沿跨长变化的弹性基床系数

$$\beta_c(x) = \frac{K_c(x)}{\lambda_c}$$

此时,上式(4-125)可改写为

$$\omega_b^2 = \frac{\int_L \beta_c(x) \eta^2(x) dx}{m \int_L \eta^2(x) dx} \quad (4-126)$$

注意到主梁和拉索的自重 mg 与拉索的恒载应力 σ_{gc} 之间的关

系为

$$\sigma_{gc} = \frac{S_g}{A_c} = \frac{mg\lambda_c}{A_c \sin \alpha_c}$$

或

$$A_c = \frac{mg\lambda_c}{\sigma_{gc} \sin \alpha_c}$$

于是,式(4-126)可改写为

$$\omega_b^2 = \frac{\int_0^L \frac{E_c g \sin \alpha_c}{\sigma_{gc}(x) L_c(x)} \eta^2(x) dx}{\int_0^L \eta^2(x) dx} \quad (4-127)$$

式中, σ_{gc} 和 L_c 均和跨径 L 成正比。因此,斜拉桥的面内弯曲基频可近似地表示成中跨跨径的函数。

$$f_b = \frac{\omega_b}{2\pi} \approx \frac{C}{L} \quad (4-128)$$

表 4-4 中列出了国内外一些斜拉桥用有限元法算得的一阶对称弯曲频率及相应的 C 值。其平均值对预应力混凝土斜拉桥约为 105,而对于钢斜拉桥约为 110。

斜拉桥一阶对称弯曲频率

表 4-4

	桥 名	$L(m)$	$f_b(Hz)$	$C = Lf_b$	C
预应力混凝土 斜拉桥	上海泖港桥	200	0.531	106.2	105
	天津永和桥	260	0.407	105.8	
	美国 P-K 桥	299	0.34	101.7	
	广州海印桥	175	0.646	113	
叠合梁 斜拉桥	加拿大 Annacis 桥	465	0.242	112.5	109
	上海南浦大桥	400	0.271	108.1	
	美国 Sunshine 桥	366	0.29	106.14	

对于边孔设有辅助墩的斜拉桥, C 值将可能提高到 150 左右。

4.5.3 扭转固有振动频率的近似计算

用上节同样的方法,不难写出斜拉桥扭转为主的振动频率近似公式

$$\omega_a^2 = \frac{\left[\int_L EI_w (\varphi'')^2 dx + \int_L GI_d (\varphi')^2 dx + b_c^2 \sum_{e=1}^N \frac{E_c A_c \sin^2 \alpha_c}{L_c} \varphi_c^2 + b_c^2 \sum_{e=1}^N \Delta S \frac{\cos^2 \alpha_c}{L_c} \varphi_c^2 \right]}{\int_L r^2 m_b \varphi^2 dx + \frac{b_c^2}{3} \sum_{e=1}^N m_c \varphi_c^2 L_c} \quad (4-129)$$

式中, φ 为扭转角; b_c 为索面距的一半; γ 为质量回转半径; EI_w 和 GI_d 分别为主梁的约束扭转刚度和自由扭转刚度。

同前,可忽略索力的二次影响。同时,将动能中拉索的质量并入主梁,并假定为常数。

对于开口截面的主梁,上式分子中的前二项相对于双索面所提供的抗扭刚度要小得多,此时

$$\omega_a^2 = \frac{b_c^2 \int_L \beta(x) \varphi^2(x) dx}{mr^2 \int_L \varphi^2(x) dx} \approx \left(\frac{b_c}{r} \right)^2 \omega_b^2$$

或

$$f_a = \frac{b_c}{r} f_b \quad (4-130)$$

因此,扭弯振动频率比为

$$\epsilon = \frac{f_a}{f_b} = \frac{b_c}{r} \quad (4-131)$$

对于采用单索面的箱形截面主梁, $b_c = 0$, 拉索将不能提供抗扭刚度,同时,约束扭转刚度的能量与自由扭转刚度的能量相比也较小,此时,扭转振动频率简化为

$$\omega_a^2 = \frac{\int_L GI_d (\varphi')^2 dx}{mr^2 \int_L \varphi^2 dx} \quad (4-132)$$

令扭转振型 $\varphi(x) = A \sin \frac{\pi x}{L_a}$, L_a 为扭转振型的半波长,相当于两个反扭点之间的距离,则由对 x 在 $0 \sim L_a$ 内积分,可得

$$f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{L_a} \right) \sqrt{\frac{GI_d}{mr^2}} \quad (4-133)$$

可见,扭转振动频率比主要取决于主梁截面的抗扭刚度和索面布置。此外,塔梁固结或边跨是否设置辅助墩对扭转振型的半波长 L_s 也有较大的影响。根据资料统计,对于边跨无辅助墩的对称双塔斜拉桥,扭转振动频率比的变化范围为

开口截面(双索面) $\epsilon = 1.4 \sim 1.6$

分离箱截面(双索面) $\epsilon = 1.7 \sim 1.8$

单箱(单索面) $\epsilon = 1.8 \sim 2.0$

多箱(双索面) $\epsilon > 2.0$

采用斜索面的布置(配以 A 型索塔或宝石型索塔)将提高斜拉桥的扭转振动频率,这是因为倾斜的索面将使主梁在扭转时伴随着更大侧向弯曲变形。

最后,应当指出的是,斜拉桥两端锚墩的侧向刚度(或侧向支承条件)对于斜拉桥平面外的空间弯扭动力特性有较大影响,当采用有限元法进行动力分析时,要慎重对待力学模型的侧向支承条件。由于斜拉桥的侧向弯曲变形和扭转变形强烈耦合,侧向弯曲的支承条件将会影响其扭转振动频率。其次,当采用开口截面的桥道主梁时,必须注意考虑约束扭转刚度的有利作用。而对于闭口箱形截面的主梁,则可忽略约束扭转刚度的影响。

4.6 斜拉桥的车辆强迫振动

以往公路桥梁的车辆振动研究主要是针对梁式桥,而对于斜拉桥在汽车荷载下的动力作用研究得非常少。在现行桥梁规范中关于冲击系数的条文中也不包括斜拉桥,并且基于梁式桥车辆振动的理论分析和实测结果的冲击系数公式是否适用于斜拉桥也是存在疑问的。

斜拉桥主梁的静力特性表现为拉索弹性支承的连续梁,各截面内力影响线具有局部性,其峰值在靠近锚墩和跨中附近较大,加载长度也较大,这就使主梁的内力包络图呈哑铃状(图 4-21)。

斜拉桥的动力特性则表现为总体性,如上一节中所介绍的。

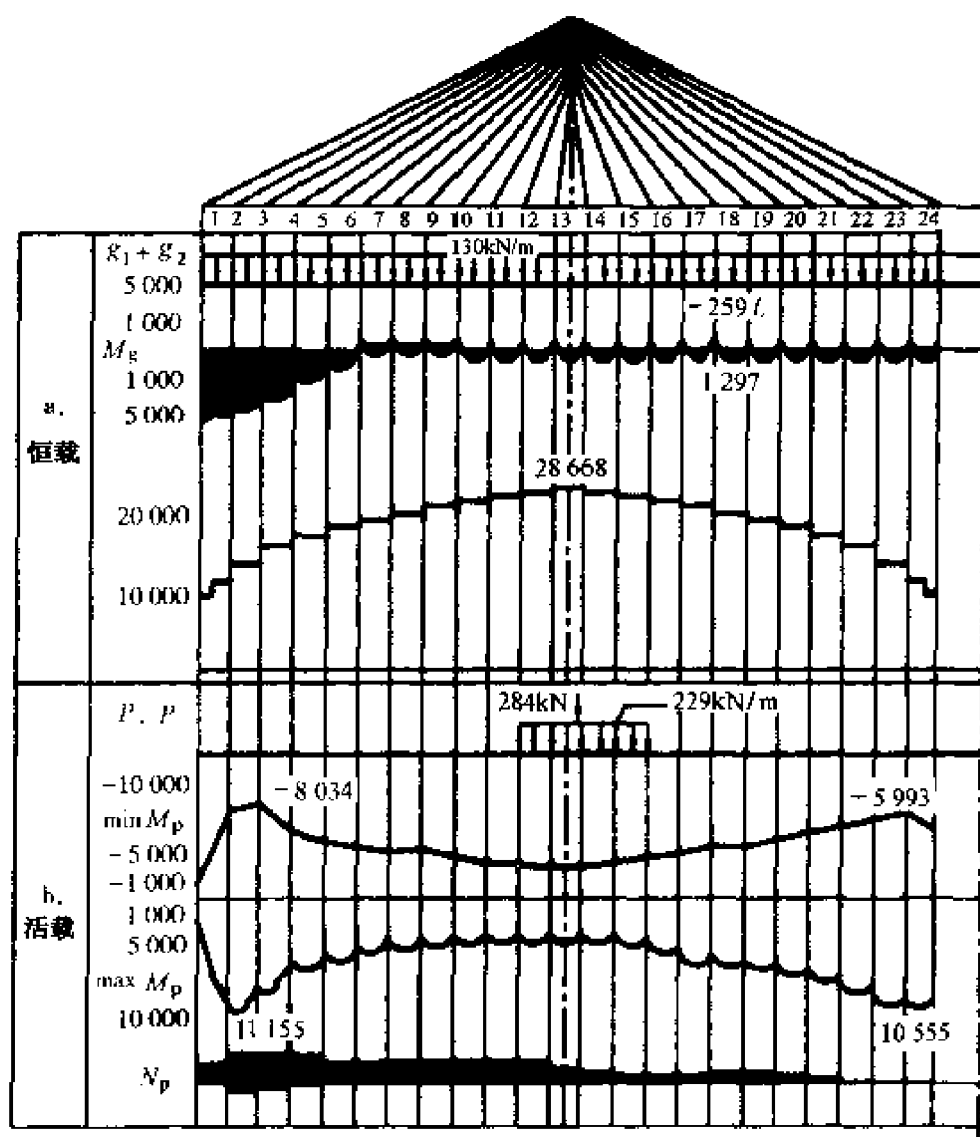


图 4-21 斜拉桥的内力包络图

在常用跨径 200 ~ 500m 的范围内,斜拉桥的一阶弯曲振动频率(基频)约在 0.5 ~ 0.2Hz 之间,远低于载重汽车 2 ~ 5Hz 的固有频率。因此,斜拉桥很难像简支梁那样在临界速度下形成共振条件,荷载的动力效应主要是载重汽车在行驶过桥并遇到桥面不平时的局部冲击作用。

将图 4-22a 的斜拉桥理想化为弹性支承上的连续梁模型(图 4-22b),用车桥耦合振动的分析方法可以计算出一辆 STEYR - 1491 型载重汽车匀速过桥时在跨中受到高 70mm 的半正弦波形凸

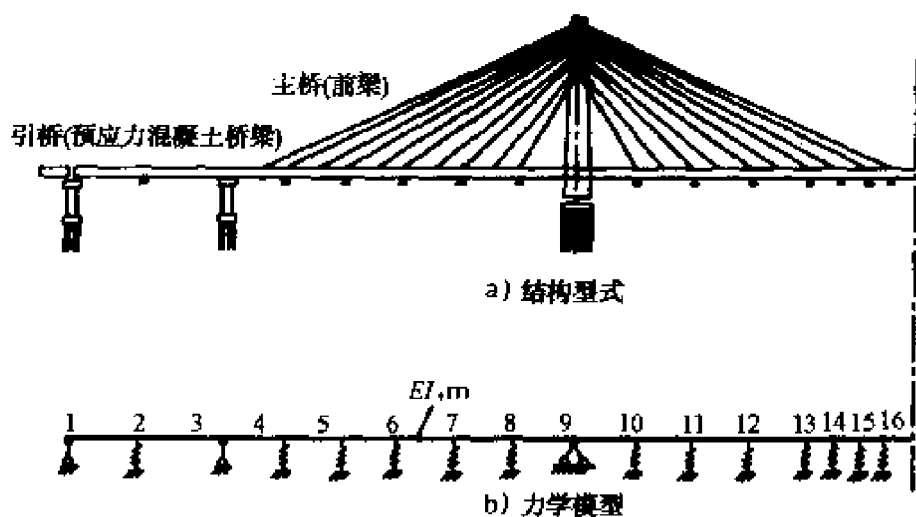


图 4-22 斜拉桥的力学模型

块的冲击(模拟路面不平)时,斜拉桥跨中截面弯矩反应的时程曲线,如图 4-23a 所示。弯矩的动态增量为 $\phi_M = 0.29$ 。分析表明:车

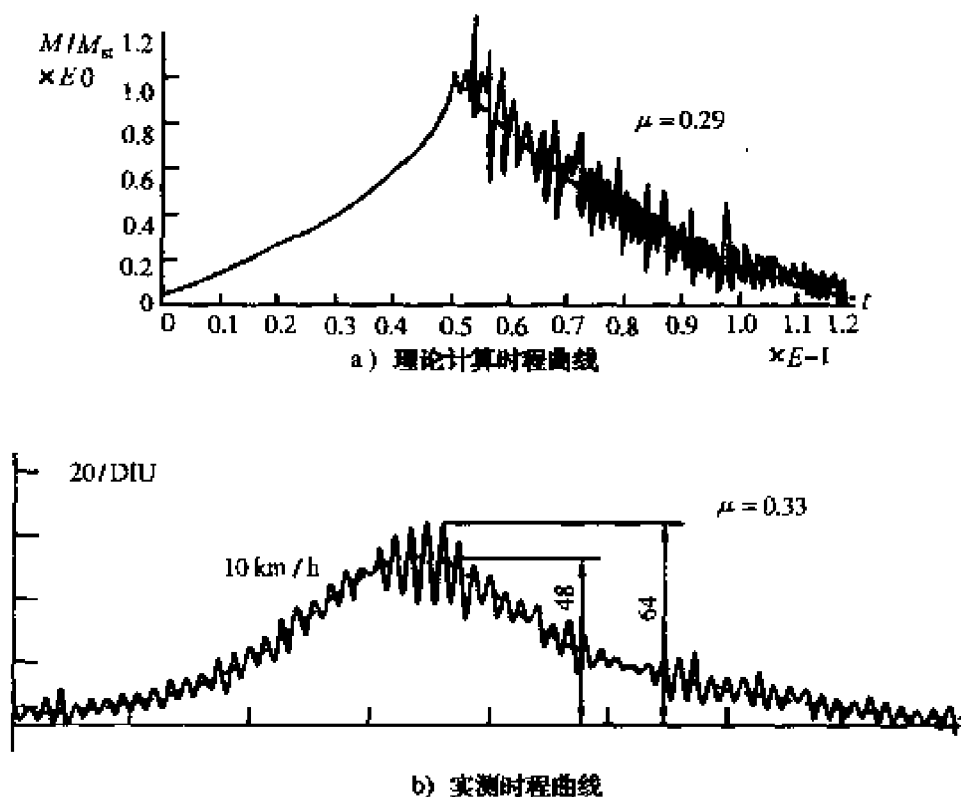


图 4-23 斜拉桥的跨中弯矩时程曲线

辆的行驶速度影响很小,计算时取与实测相同的车速 10km/h。图 4-23b 则表示实测的时程曲线,动态增量为 0.33。两者是相近的。这表明理论分析的方法具有足够的精度,是可靠的。

理论分析还表明,桥头受 10mm 高的 45°斜坡冲击时能够激起对靠近端支座附近截面的高谐振型,并使该截面的弯矩反应中发生较大的动态增量($\phi_M = 0.35$),也是不可忽视的。

总之,斜拉桥的车辆振动有其特殊的规律,不能随意借用梁桥或悬索桥的冲击系数公式。在目前尚无具体规范条文的情况下,可暂按梁式桥的冲击系数公式取用。

第五章 桥梁冲击系数

在结构动力学中讨论的强迫振动问题,一般是以结构作为一个多自由度的质点体系在位置固定的周期性扰动力作用下的强迫振动问题为对象。当扰动力的频率与体系的固有频率相等时则发生共振。描述共振发生的条件、共振时振幅与阻尼比之间的数学表达式都比较明确,也易于接受。而研究桥梁在移动车辆荷载下的强迫振动问题,在前几章已经发现是相当困难的。由于荷载是移动的,而且车辆荷载本身也是一个带有质量的振动系统,使桥梁——车辆耦合系统的动力特性随荷载位置的移动而不断变化,达到共振条件只能在短时间内满足,并且车辆荷载在桥上通过的时间也是有限的。这正是桥梁的车辆荷载激振问题的特点和复杂性所在。

虽然,现代车桥耦合振动理论有了很大的发展,但是由于车辆动力特性的复杂性和参数的不确定性,公路桥梁钢筋混凝土或预应力混凝土承重结构动刚度的变化特性,桥梁阻尼的离散性和桥面不平的随机性,即使对于桥跨上只有一辆载重汽车的情况,要想通过理论分析的途径来解决动力效应的计算问题也还有一定的困难。对于桥跨上同时有多于一辆车的更复杂的情况,在基于概率论的分析方法以及对许多有关的参数进行统计等工作没有解决之前,人们在设计实践中仍不得不借助于实验的方法,通过经验的“冲击系数”公式来近似地考虑车辆荷载的动力效应。

本章将介绍动荷载试验研究成果,引出桥梁冲击系数的概念,并对规范中的冲击系数进行分析评价,以便更准确地对公路桥梁进行动力设计。

5.1 桥梁冲击系数概念

自从 1876 年法国工程师 Dupuy 发明了第一个测量动应变的自动记录仪后,德国的 Fränkel 教授又陆续制成了应变计(1881)、位移计(1884)和地震仪(1891)等动态记录仪器。在 1849 年 Willis 的模型试验约 30 年后,由于欧洲及美洲许多铁路桥梁在 1878 ~ 1895 年间的相继失事,开始了对铁路桥梁在列车通过时的振动测试,从振动记录(图 5-1)中明确了荷载的动力效应,建立了冲击作用的概念。冲击系数定义为最大动态位移和最大静态位移之比

$$\varphi = \frac{A_{\text{dyn}}}{A_{\text{st}}} = 1 + \mu \quad (5-1)$$

或动态增量

$$\mu = \frac{A_{\text{dyn}} - A_{\text{st}}}{A_{\text{st}}} = \varphi - 1$$

式中, A_{dyn} 为当车辆荷载过桥时桥梁跨中挠度的峰值; A_{st} 为同一车辆荷载静力作用时跨中挠度的最大值。

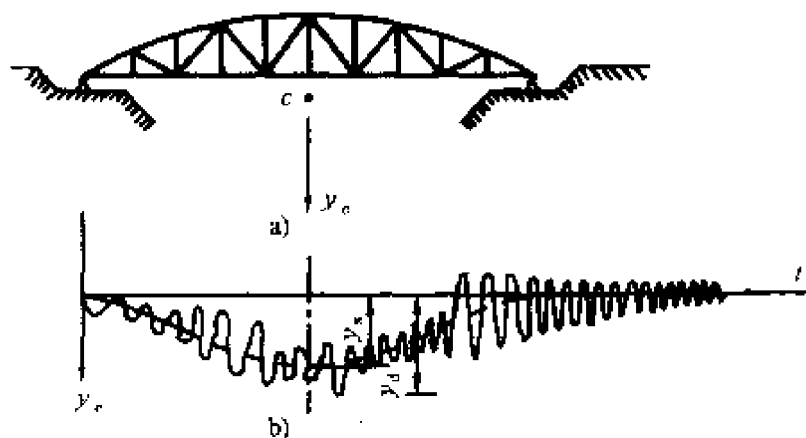


图 5-1 跨中动挠度实测记录

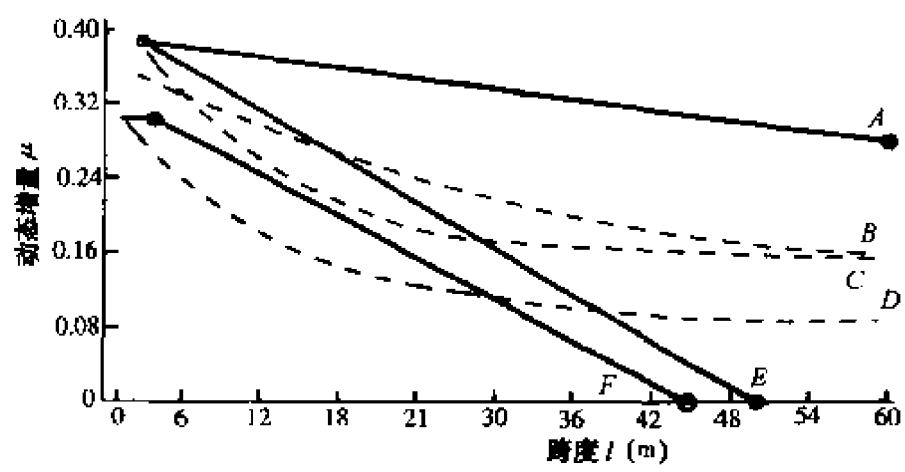
旨在建立铁路桥梁“冲击系数曲线”的系统试验,即用不同车速,不同车型,在不同类型和跨径的梁式桥中进行大规模的振动试验,约在 1907 到 1921 年间在欧美各国相继进行,其中也包括著名的成立于 1880 年的瑞士 EMPA 实验室。

用冲击系数 φ 代表移动车辆荷载对桥梁的动力效应的方式很快就得到了广泛的承认。世界各国根据实验结果发现了冲击系数随桥梁跨径递减的趋势,制定了作为跨径 l 的递减函数的桥梁效应动态增量公式,其典型形式为

$$\mu = \frac{a}{b + l} \tag{5-2}$$

与铁路桥的冲击作用相比,公路桥梁的车辆振动问题并不严重,但激励机制却更为复杂。第一次采用振动记录进行公路桥梁荷载动力试验是 1892 年法国工程师 M. Deslandres 在巴黎附近的 Pontoies 桥上所做的。美国在 1910 年也做了若干公路桥梁的振动测试,以了解荷载的冲击作用。对公路桥梁荷载动力效应的系统研究开始于 1930 年。1931 年英国土木工程师协会根据一系列的简支梁桥的实测数据制定了最早的公路桥梁荷载冲击系数规范。

自 1931 年以来的数十年间,各国的冲击系数公式经过了多次修改。图 5-2 表示一些主要国家的现行公路桥梁冲击系数公式。



A:美国 B:日本 C:瑞士 D:法国 $g/p = 3.0$ E:原联邦德国 F:中国大陆

图 5-2 几个主要国家公路桥梁冲击系数比较

可以看出:各国规范相差很大,这说明影响公路桥梁荷载冲击系数的因素是十分复杂的。实验数据的离散性也很大,因而可以认为仅用跨径 l 一个参数来概括是不够充分的。

随着数字计算机的飞速发展以及有限元法和数值分析方法的广泛应用,自 70 年代起的现代车桥耦合振动研究可以更精确地考虑桥梁模型、车辆模型以及它们之间的耦合振动。对于引起激励的路面不平,车辆加速和制动减速效应等复杂的随机因素都进行了研究。除了简支梁桥以外,对连续梁桥,悬索桥和斜拉桥也进行了一些理论分析和实验研究。

应当特别指出,瑞士的 EMPA 实验室自 1924 年以来对移动荷载的冲击系数进行了十分深入和系统的实验研究。基于大量的实测数据,他们指出车辆振动本质上是一种强迫共振现象,用放大谱,即把冲击系数定义为桥梁固有频率的函数,来代替现行的按跨径递减的冲击系数公式可能更为合理。1979 年加拿大安大略省规范(Ontario Code)率先接受了这一新概念,建立了放大谱的新规定,1982 年又根据新的实测资料作了进一步的修改。目前,欧洲和德国规范正在做修改冲击系数的研究工作。可以预见,由于理论分析手段和实验方法的进步,在下世纪初,世界各国的冲击系数规范将会以新的面貌出现,并且必将更为合理地反映车辆——桥梁耦合振动的实际。

5.2 桥梁动态荷载试验

世界各国在制定荷载的冲击系数时都进行过一定的桥梁动态荷载试验。瑞士联邦材料试验和研究实验室 EMPA 自 1922 年起对于公路桥梁荷载的动力效应进行了长达 60 余年的实验研究,积累了丰富的资料,其中特别是在 1958 年至 1981 年间对 226 座各类公路梁式桥所进行的实验,得到了一些十分有价值的成果和结论。

5.2.1 实验方法

动态实验是在一辆满载的双轴军车以各种车速通过桥梁时进行的。车辆的总重量为 110 ~ 193kN,平均 158kN(相当于 15t 的载重车),50% 的车辆总重为 160 ± 5 kN。车辆的前后轴距为 3.4 ~

6.0m, 平均值 4.4m, 70% 的轴距为 $4.5 \pm 0.12\text{m}$ (稍大于我国规范的车辆轴距 4m)。试验时车辆的行驶速度为 10 ~ 80km/h, 平均 47km/h。实验分以匀速通过桥面以及跳过设在跨中的 $50 \times 300 \times 500\text{mm}$ 板条(模拟路面不平的冲击作用)两种情况。

被测桥梁的跨径在 11.0 ~ 118.8m, 平均 39.5m。一般在简支梁的跨中或连续梁大跨的跨中进行振动位移测量, 从动力响应中可以获得下列信息: 桥梁的前几阶频率, 与行驶速度有关的动态增量。

5.2.2 固有频率统计分析

224 座桥梁的一阶固有频率的实测值为 $f = 1.23 \sim 14.0\text{Hz}$, 平均 $f_m = 3.62\text{Hz}$ 。频率对于跨长的回归函数为

$$f = 95.4l^{-0.933} \quad (\sigma_f = \pm 0.81\text{Hz}) \quad (5-3)$$

图 5-3 表示实测值和回归公式与粗略的经验公式 $f = \frac{100}{l}$ 之间的对比。

如果从 224 个实测值中去掉一些特殊结构的点, 从保留的 100 个数据中得到的回归函数为(图 5-4)

$$f = 90.6l^{-0.923} \quad (\sigma_f = \pm 0.61\text{Hz}) \quad (5-4)$$

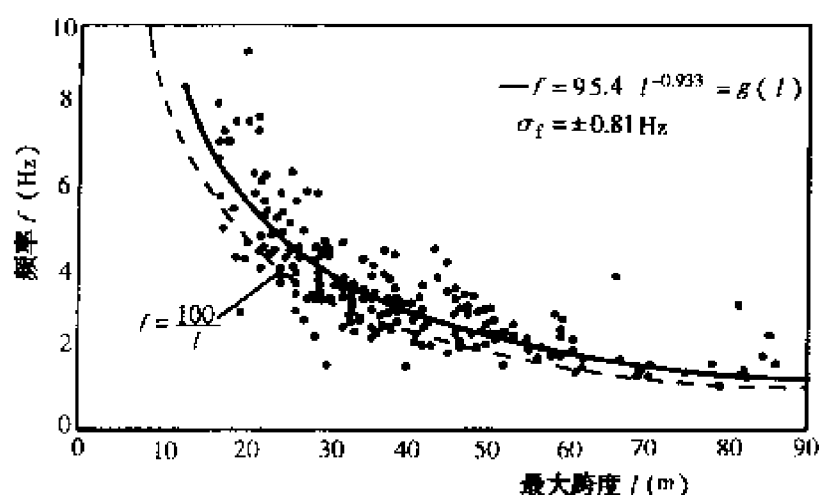


图 5-3 简支梁桥实测频率回归(224 个点)公式

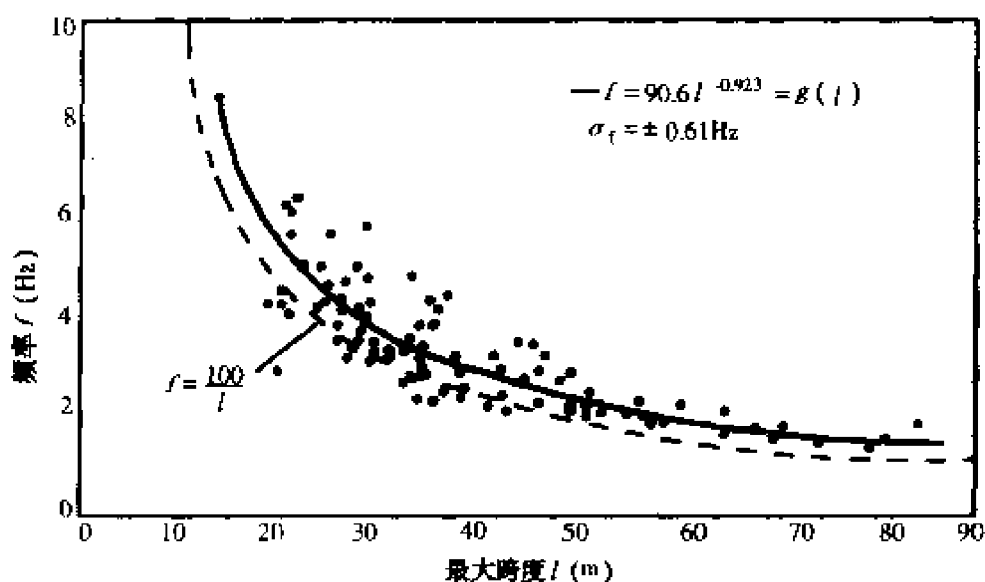


图 5-4 简支梁桥实测频率优化回归公式(100 个点)

5.2.3 桥梁阻尼统计分析

桥梁阻尼是一个重要的但十分复杂的参数,它由材料阻尼,结构阻尼和系统阻尼(上下部结构之间的相对运动 and 下部结构振动耗能产生)所组成。EMPA 的试验结果表明:桥梁阻尼的离散性很大。211 座钢筋混凝土桥梁的实测值为

$$\delta_{\min} = 0.014 \quad (\zeta = 0.22\%)$$

$$\delta_{\max} = 0.36 \quad (\zeta = 5.73\%)$$

$$\text{平均值 } \delta_m = 0.080 \quad (\zeta = 1.27\%)$$

出现的最高频率集中在 $\delta = 0.05$ ($\zeta = 0.8\%$), 小于一些资料所报告的桥梁阻尼比变化范围为 $\zeta = 1\% \sim 3\%$ 。从统计中还发现有下列的规律:

总长 $\geq 125\text{m}$ 的直线、窄的和闭口横截面的长桥: $\delta_m = 0.048$ ($\zeta = 0.76\%$);

总长 $< 75\text{m}$ 的曲线、宽的和开口截面的短桥: $\delta_m = 0.100$ ($\zeta = 1.6\%$)。

应当指出的是上列数值都是在弹性,小振幅范围内测得的,并且是对应于基频的阻尼值。对于桥梁的阻尼问题的研究还有许多

工作要做。

5.2.4 动态增量分析

EMPA 将 73 座钢筋混凝土梁桥在通过一辆载重车时的动态增量的实测值和跨径的关系表示在一张图上(图 5-5),并和现行瑞士规范的冲击系数公式作一对比。图 5-6 则表示从 69 座桥上测得的当载重车跳过一板条时的动态增量。

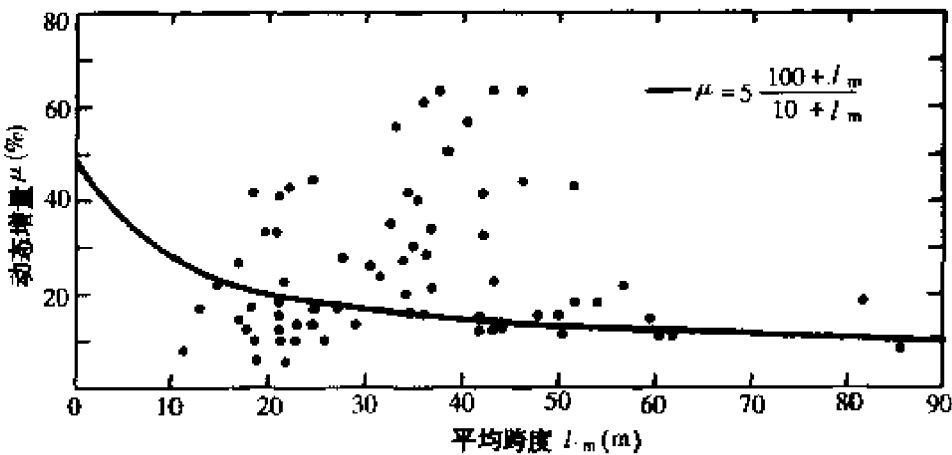


图 5-5 路面平坦时的动态增量

从图 5-5 和图 5-6 中可以得出以下几点结论：

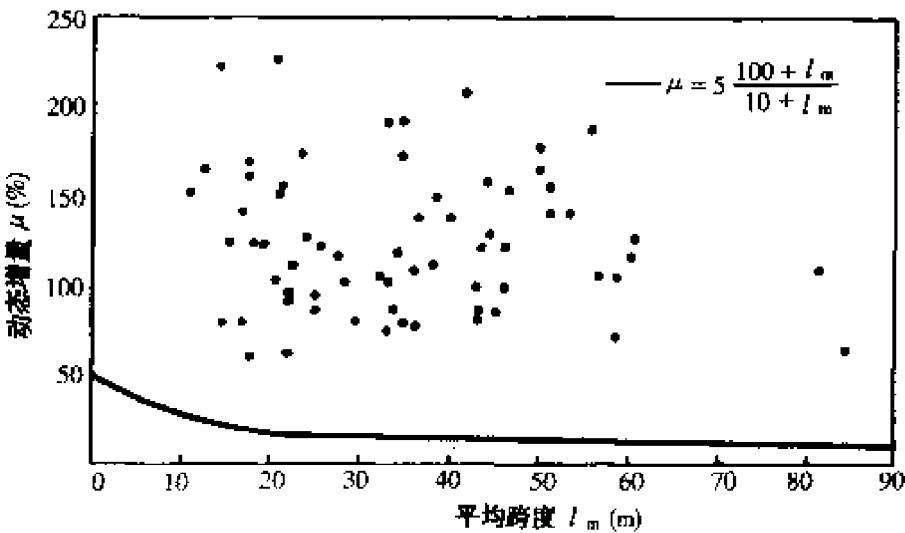


图 5-6 路面不平(跳过板条)时的动态增量

1. 动态增量 μ 和跨径之间并没有明显的递减关系,而且实测结果和现行规范不符。

2. 当桥面平坦(不设板条)时,最大的动态增量为 65%,最小为 2%,平均 26%;而当桥面不平坦(设板条)时,最大动态增量增大至 227%,最小为 58%,平均 123%,增大 4~5 倍。可见,桥面的平整与否对动态增量的影响极大。

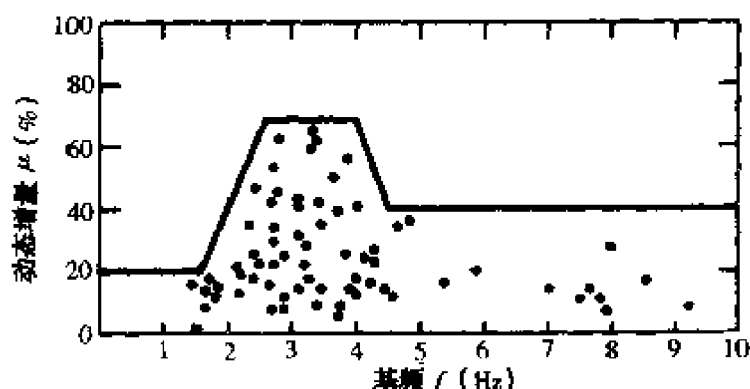


图 5-7 无板条冲击时的放大谱

3. 在桥面平坦(无板条冲击)的情况下,最大的动态增量(50%~70%)发生在基频为 2.5~4 Hz 的桥梁上。图 5-7 表示动态增量和桥梁基频的关系,即动力放大谱。一般的两轴载重车在平坦的桥面上行驶时,其悬挂弹簧因摩擦力未被克服很少参与变形,此时车辆的竖直振动频率约为 3~3.5 Hz。因此,基频为 2.5~4 Hz(相当于 $l = 25 \sim 40\text{m}$)的桥梁将因共振发生最大的动态增量。

4. 当车轮在桥面上受到板条的冲击时,由于簧上振动加大,悬挂弹簧的摩擦装置将被克服,而和轮胎一起变形。此时,车辆的振动频率将有所降低。图 5-8 表示受板条冲击时的动态增量和桥梁

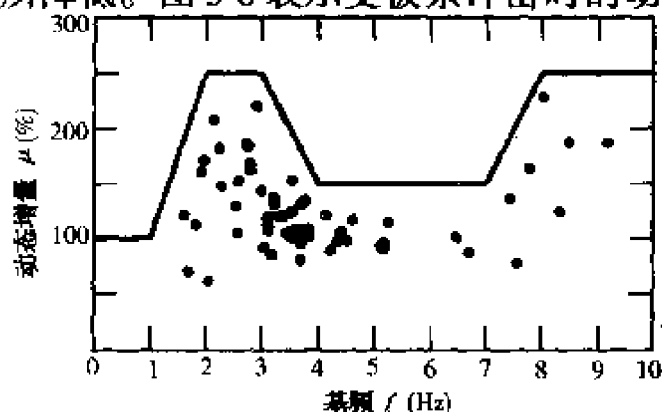


图 5-8 受板条冲击时的放大谱

基频的关系。第一个共振峰值区在 2.5 ~ 3.3Hz 的范围内。第二个共振区发生在大于 7Hz 的范围内,相当于车辆的高阶频率。

5.3 公路桥梁设计规范中的冲击系数

世界各国现行桥梁设计规范中的冲击系数公式,除了加拿大安大略省规范已改用放大谱,即把冲击系数定义为桥梁基频的函数,以及瑞士 EMPA 对 SIA 瑞士规范提出了类似的修改建议外,绝大多数国家仍沿用按跨长 l 的递减函数的冲击系数公式。其中几个主要国家的动态增量公式如下:

1. 美国 AASHTO 1973 年公路桥梁设计规范

$$\text{钢桥、混凝土桥} \quad \mu = \frac{50}{125 + 3.3l} (\leq 0.3)$$

2. 德国 DIN 1072 规范

$$\text{钢桥、混凝土桥} \quad \mu = 0.4 - 0.08l$$

3. 法国 (Fascicule special 60-17bis) 规范

钢桥、混凝土桥

$$\mu = \frac{0.5}{1 + 0.2l} + \frac{0.6}{1 + \frac{G}{P}} \quad (G: \text{恒载}, P: \text{活载})$$

4. 英国 BS 5400 规范

在制定设计荷载时已包含了 25% 的冲击效应。

5. 日本 1972 年公路桥梁规范

$$\text{钢桥} \quad \mu = \frac{20}{50 + l}$$

$$\text{预应力混凝土桥} \quad \mu = \frac{10}{50 + l}$$

$$\text{钢筋混凝土桥} \quad \mu = \frac{7}{20 + l}$$

6. 前苏联 1962 年规范

$$\text{钢桥} \quad \mu = \frac{15}{37.5 + \lambda} \quad (\lambda \text{ 为跨径或加载长度})$$

$$\text{钢筋混凝土梁式桥} \quad \mu = \frac{10}{20 + \lambda} \geq 0.15$$

$$\text{钢筋混凝土拱桥} \quad \mu = \frac{A}{100 + l} \left(1 + 0.4 \frac{l}{f} \right)$$

$$\text{其中, } A \begin{cases} = 10, \text{ 当 } l \leq 110\text{m} \\ = 15, \text{ 当 } l \geq 140\text{m} \\ = \frac{l}{6} - 8.3, 110\text{m} < l < 140\text{m} \end{cases}$$

7. 中国 1985 年规范

$$\text{钢桥(除吊桥外)} \quad \mu = \frac{15}{37.5 + l}$$

$$\text{吊桥} \quad \mu = \frac{50}{70 + l}$$

$$\text{钢筋混凝土梁桥} \begin{cases} l \leq 5\text{m} & \mu = 0.3 \\ l \geq 45\text{m} & 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} l \leq 5\text{m} \\ l \geq 45\text{m} \end{matrix}} \right\} \text{直线内插}$$

$$\text{钢筋混凝土拱桥} \begin{cases} l \leq 20\text{m} & \mu = 0.20 \\ l \geq 70\text{m} & 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} l \leq 20\text{m} \\ l \geq 70\text{m} \end{matrix}} \right\} \text{直线内插}$$

图 5-2 表示各国冲击系数公式的对比。可以看出,冲击系数在 $l \rightarrow 0$ 时最大值都在 0.3~0.4,是相近的。但 μ 随 l 的递减关系却相差很大,这说明冲击系数和跨径的关系离散性很大,并且公路桥梁荷载的冲击作用机制不同于铁路荷载,沿用 $\mu = \frac{a}{b+l}$ 的递减关系并不能正确地反映公路桥梁中车辆荷载动力效应的内在规律。因此,加拿大安大略省规范率先提出的用放大谱的形式来代替传统的冲击系数公式是一个合理的趋势。图 5-9 表示 1979 年制定的加拿大安大略省规范以及 1982 年根据 1980 年的试验结果重新修订的放大谱。动态增量的最大值为 0.40,发生在基频为 2.5~4.5Hz(相当于 40~20m 简支梁)的范围内,并向两边分别递减为 0.2 和 0.25。

如果按 $f = \frac{l}{100}$ 的近似关系将放大谱 $\mu - f$ 转换为 $\mu - l$ 曲线,并和我国现行规范作一对比(图 5-10),可以看出:我国规范对于冲击系数是估计过低了,尤其是考虑到我国公路桥面的平整度一般

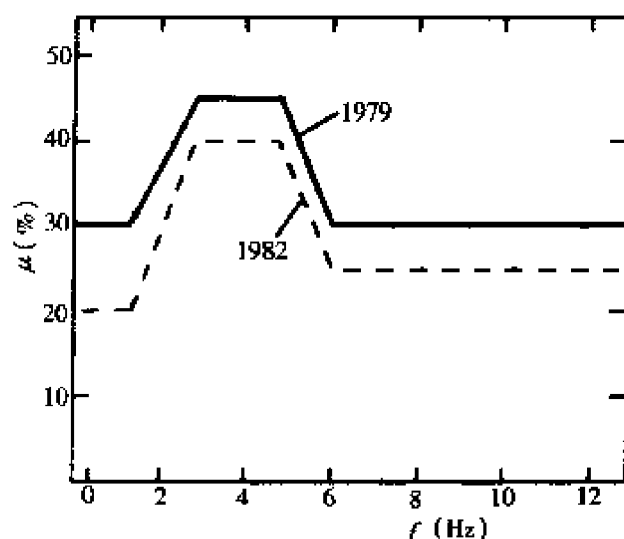


图 5-9 加拿大安大略省规范

都差于国外的实际情况,是偏于不安全的。因此,有必要制定我国公路桥梁荷载的放大谱。

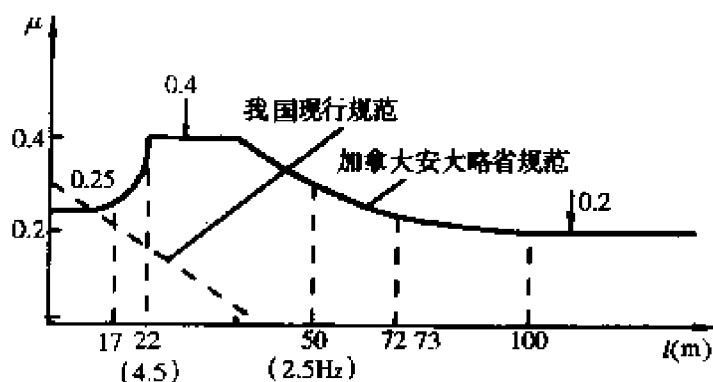


图 5-10 加拿大规范与中国规范对比

当影响线的加载长度可以容纳二辆以上的载重车辆时,如果按现行规范同时乘以相同的冲击系数是过于保守了。加拿大安大略省规范根据概率分析建议用下列修正系数的方法对冲击系数进行折减:

两辆车	0.7
三辆车	0.6
多于三辆车	0.5

第六章 桥梁结构的地震振动 与地震反应分析

我国是世界上的多地震国家之一,尤其是近十多年来,我国地震活动较为频繁。因此,桥梁结构抗震防灾尤为重要。

6.1 桥梁震害与抗震设计方法

桥梁工程为生命线工程之一,其破坏会造成震后救灾工作的巨大困难,加重了次生灾害。调查与了解桥梁的震害及其产生的原因是建立正确的抗震设计方法,采取有效抗震措施的科学依据。

桥梁如缺乏正确的抗震设计,在地震时将产生严重的损坏。事实表明,世界上由于地震袭击而毁坏的桥梁的数量,远远多于因风振、船撞等其他原因而破坏的桥梁。这已普遍引起了全世界桥梁抗震工作者的关注,纷纷对过去相关的抗震规范予以反省,对结构的抗震设防标准与抗震设计原则提出了一系列新的观点。本节综合国内外桥梁抗震工作者调查分析成果,简要介绍桥梁震害和抗震设计方法。

6.1.1 桥梁震害

桥梁的震害主要反映在结构的各个部位。

1. 桥梁上部结构的震害

我国在地震区域内建有大量的梁桥和拱桥。梁、拱上部结构本身遭受震害而毁坏的情形是较少的,往往是由于桥梁结构其他部位的毁坏而导致梁体、拱体的损伤。拱桥上部结构在地基牢固、墩台坚实的条件下,自身遭受震害损坏极为少见,但地基较差或采

用柔性桩墩的多孔连拱桥,上部结构震害较严重,主要表现为拱上建筑腹拱破坏,拱圈在拱脚、拱顶产生破损裂缝,甚至产生拱圈整个起隆变形。从世界各地的震害来看,梁、拱上部结构因地震惯性力直接破坏尚极为少见。但对大跨度吊桥、斜拉桥是否会产生上部结构因地震力作用而毁坏,是为桥梁工程师所关心的问题,世界各国都在深入研究之中。

2. 支座的震害

地震中,桥梁支座的震害极为普遍,它历来被认为是桥梁整体抗震性能上的一个薄弱环节。其原因主要是支座设计没有充分考虑抗震的要求,构造上连接与支挡等构造措施不足,某些支座型式和材料上的缺陷等因素。破坏形式主要表现为支座锚固螺栓拔出剪断、活动支座脱落及支座本身构造上的破坏等。而且,随着支座破坏的同时,也伴随着支座下垫石混凝土破碎。尤其是支座倾倒、脱落、移位后,结构的力的传递方式引起变化,从而对结构其他部位的抗震产生影响,进一步加重震害。

3. 落梁的震害

地震时,桥梁落梁大都发生在顺桥向,横向落梁的毁坏是较少见的。调查表明,顺桥向落梁震害有的是墩倒梁落,也有的是梁落而毁墩。主要的原因有墩台倾倒或倒塌、河岸滑坡、地基下沉、桥墩破坏、支座破坏、梁体碰撞、相邻墩发生过大的相对位移等等。因而如何加强梁桥上、下部相互联系的构造措施已为各国桥梁工作者所重视,大都在相应的抗震规范中有所规定,其次增强桥梁结构的延性抗震能力被大大重视了。

4. 下部结构和基础的震害

桥梁下部结构和基础的严重破坏是导致桥梁倒塌并在震后难以修复使用的主要原因。桥梁墩台因砂土液化、地基下沉、岸坡滑移或开裂引起破坏是很难采用加强它们的抗震能力来避免的,一般应在选择桥址、桥型、结构布置上加以注意。如难以避免在地震不良地段建造桥梁,则除桥型及结构布置要采取措施外,还应采取必要的土层加固措施。此外,桥梁墩台和基础震害是由于受到较

大的水平地震力,瞬时反复振动在相对薄弱的截面产生破坏而引起的。如台墙因配筋不足被梁体撞穿,或承受过大的动土压力而倾倒。石砌或混凝土桥墩墩身震害大都从施工接缝处的轻微裂缝开始,继而扩展至四周造成剪断面破坏,甚至导致墩身移位或断落。钢筋混凝土桥墩常出现受压缘混凝土崩溃,钢筋裸露屈曲,从而导致变形过大而破坏。我国公路桥梁广泛采用的钻孔灌注桩与柱式墩在历次地震中都出现程度不同的破坏,破坏位置大都在墩帽下方,或柱身与承台连接处,或灌注桩在地面以下 1~3m 左右范围内。钢筋混凝土较高柔性墩破坏形式一般都为弯曲型的,这种严重的破坏型式是桥梁结构工程师要力求避免的。加强这类结构的抗震能力不是单纯地去提高它们的强度抗震能力,从震害调查表明,要提高钢筋混凝土结构的延性,使其能承受较大的塑性变形并避免发生累积损伤效应。

6.1.2 抗震设计方法

抗震设计方法的演变依赖于地震力理论的发展。地震力理论也称地震作用理论,它研究地震时地面运动对结构产生的动态效应。地面运动现在可用强震仪以加速度时程曲线(两个水平一个竖向)的形式记录,在工程应用中简称地震波记录。结构在地震波激励下的强迫振动是随机振动,求解结构地震反应是相当复杂的。在桥梁抗震设计计算中,早期采用简化的静力法,50 年代后发展了动力法的反应谱理论,近 20 年来对重要结构物采用动力法的动态时程分析法。

1. 静力法

最早在 1899 年,日本大房森吉提出了静力法抗震设计的概念,他假设结构物各个部分与地震动具有相同的振动。此时,结构物上只作用着地面运动加速度 δ_g 乘以结构物质量 M 所产生的惯性力,把惯性力作为静力作用于结构物作抗震计算。计算公式为

$$F = \ddot{\delta}_g M = \ddot{\delta}_g \frac{W}{g} = kW \quad (6-1)$$

式中 W 为结构物各部分重量, k 为地震运动加速度峰值与重力加速度的比值。

静力法忽略了地面运动特性与结构动力特性的因素, 简单地把结构在地震时的动力反应看作是静止的地震惯性力作用下的结构内力分析, 并以结构强度作为破坏准则, 对地面运动的强弱、场地地基的优劣、结构的重要性与破坏程度的设防标准, 通常在地震荷载中以某一系数的大小来反映, 一般称之为—阶段抗震设计方法。由于该方法具有较大的局限性, 以至于在随后的地震震害资料分析和对地震作用的深入研究发现, 静力法抗震设计愈来愈暴露出其不合理程度。

2. 反应谱方法

1943 年, M. A. Biot 提出了反应谱概念, 给出世界上第一个弹性反应谱, 即一个单质点弹性体系对应于某一个强震记录情况下, 体系的周期与最大反应(加速度、相对速度、相对位移)的关系曲线。1948 年, G. W. Housner 提出基于反应谱理论的抗震计算的—动力法。至 1958 年, 第一届世界地震工程会议后, 许多国家在相应的工程结构抗震设计规范中均采用反应谱方法。

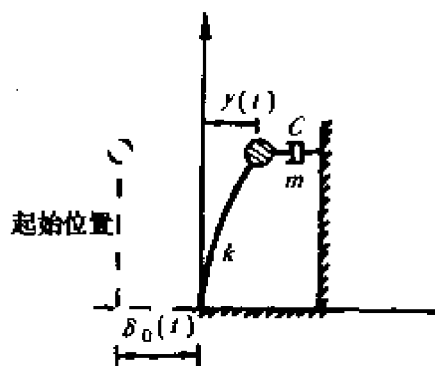


图 6-1 单质点振子的力学图式

(1) 反应谱基本原理

一个单质点振子体系见图 6-1, 由于地面运动位移 $\delta_g(t)$ 引起的单质点振子的地震振动方程, 由 D'Alembert 原理得

$$m(\ddot{\delta}_g + \ddot{y}) + c\dot{y} + ky = 0 \quad (6-2)$$

整理后可得

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{\delta}_g(t) \quad (6-3)$$

式中, 阻尼比 $\zeta = c/2m\omega$, 无阻尼圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

以杜哈美(Duhamel)积分表示方程(6-3)的地震相对位移解为

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \ddot{\delta}_g(\tau) \sin\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (6-4)$$

式中,有阻尼圆频率 $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0$

相应地,相对速度和加速度可表示成

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \ddot{\delta}_g(\tau) \\ &\quad \left[\frac{\zeta\omega}{\omega_d} \sin\omega_d(t-\tau) - \cos\omega_d(t-\tau) \right] d\tau \\ &\approx -\int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \ddot{\delta}_g(\tau) \cos\omega_d(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \omega_d \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \ddot{\delta}_g(\tau) \left\{ \left[1 - \left(\frac{\zeta\omega}{\omega_d} \right)^2 \right] \sin\omega_d(t-\tau) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2\zeta\omega}{\omega_d} \cos\omega_d(t-\tau) \right\} d\tau - \ddot{\delta}_g(t) \\ &\approx \omega_d \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \ddot{\delta}_g(\tau) \sin\omega_d(t-\tau) d\tau - \ddot{\delta}_g(t) \end{aligned} \quad (6-6)$$

上述各式中,引入阻尼比 ζ 一般很小的假设。

由于地震加速度 $\ddot{\delta}_g(t)$ 是不规则的时间函数,一般需用数值积分法求出反应的时间变化规律,即反应时程曲线。如图 6-2 所示,对不同单质点体系即不同的圆频率 ω_i 或周期 T_i 和不同的阻尼比 ζ_i 值,在选定的地震加速度 $\ddot{\delta}_g(t)$ 输入下,可获得一系列的相对位移 $y(t)$ 、相对速度 $\dot{y}(t)$ 和绝对加速度 $\ddot{\delta}_g(t) + \ddot{y}_g(t)$ 的反应时程曲线,并可从中找到它们的最大值 $y_{\max}$ 、 $\dot{y}_{\max}$ 和 $|\ddot{y} + \ddot{\delta}_g|_{\max}$ 。以不同单质点体系的周期 T_i 为横坐标,以不同阻尼比 ζ 为参数,绘出 $y_{\max}$ 、 $\dot{y}_{\max}$ 和 $|\ddot{y} + \ddot{\delta}_g|_{\max}$ 的谱曲线,简称反应谱。图 6-3 所示为 El—Centro 波求得的 $\dot{y}_{\max}$ 的反应谱。

如定义 $S_D = y_{\max}$ 为位移反应谱, $S_V = \dot{y}_{\max}$ 为拟速度反应谱和 $S_A = |\ddot{y} + \ddot{\delta}_g|_{\max}$ 为拟加速度反应谱。 S_V 和 S_A 的词义上加“拟”,是因为式(6-5)和式(6-6)中均忽略了 ζ 较小的影响项。假设式(6-4)、式(6-5)和式(6-6)积分中 $\cos\omega_d(t-\tau)$ 与 $\sin\omega_d(t-\tau)$ 积分等效,于是可得到三个谱之间具有以下关系

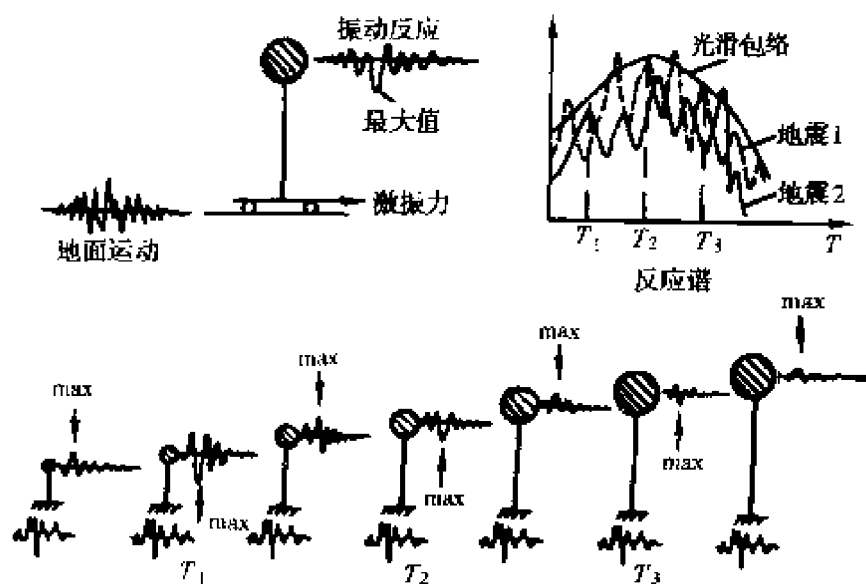


图 6-2 不同质点体系计算反应最大值示意图

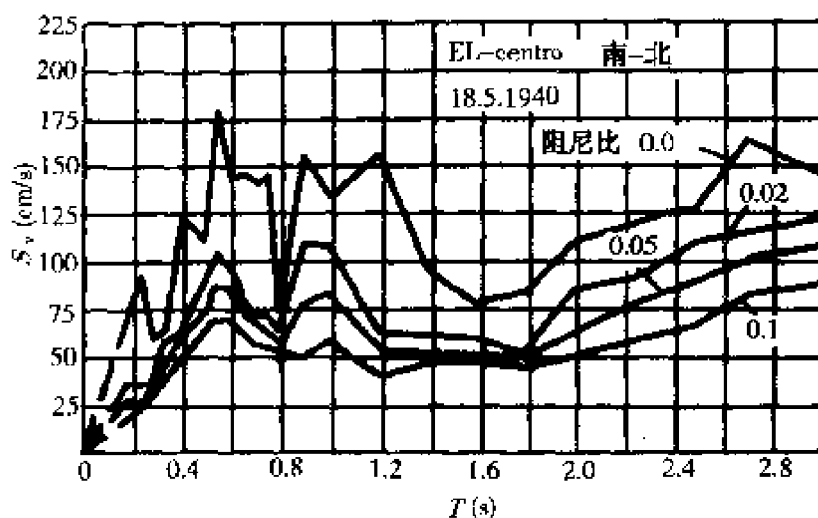


图 6-3 El-Centro(南北水平分量)波的 $\dot{y}_{max}$ 反应谱

$$\begin{cases} S_D = \frac{1}{\omega_d} S_V \approx \frac{1}{\omega} S_V \\ S_A = \omega_d^2 S_D \approx \omega^2 S_D = \omega S_V \end{cases} \quad (6-7)$$

显然,上式当 $\zeta = 0$ 时取等号绝对正确。一般上式的谱关系式是近似的。对于中频及高频体系,拟速度差不多等于最大相对速度,但对于频率很低的体系,两者相差甚大。从低频到高频,拟加速度与最大加速度之间的差别都不大。图 6-4 表示 EL-centro 地

震作用下的单质点体系的三坐标(S_D, S_V, S_A)反应谱。

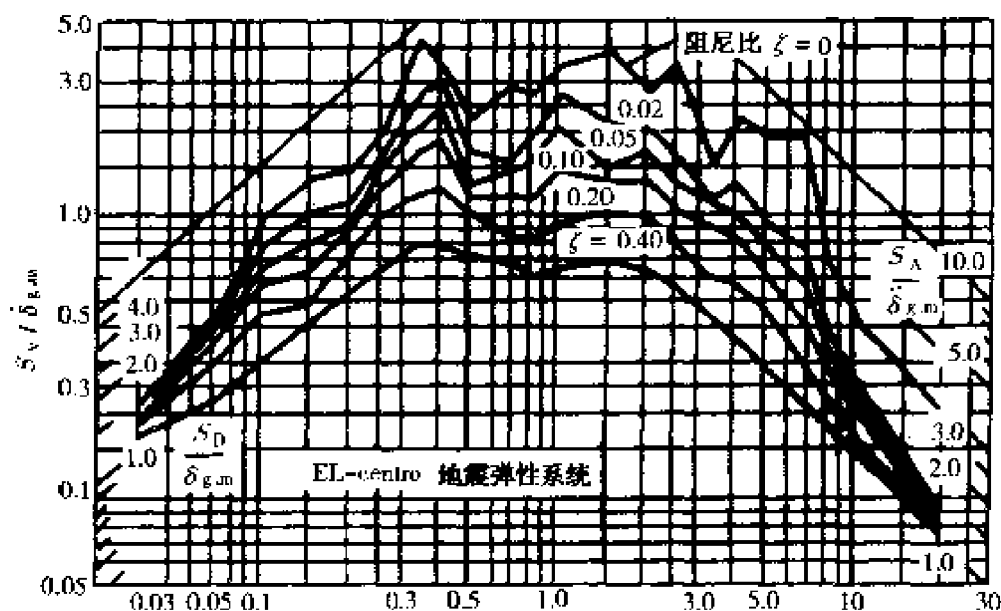


图 6-4 单质点体系在 EL-centro 地震作用下的三坐标反应谱

从图中明显可看出,对于接近于刚性的体系, ω 趋近 ∞ ,最大加速度反应 S_A 趋近 δ_g ;对于接近高柔体系, ω 趋近零,最大相对位移 $S_D = \delta_{g,max}$;在其间,体系反应均将大于地面运动相应最大值,以 a_0, v_0 和 d_0 分别表示 $\delta_{g,max}, \dot{\delta}_{g,max}$ 和 $\ddot{\delta}_{g,max}$,即 $S_D > d_0, S_V > v_0$ 和 $S_A > a_0$,放大倍数随阻尼比增加而递减。

(2)反应谱理论的地震力计算

对结构抗震计算来说,最关心的是地震力的最大值。上述单质点体系的最大地震力计算式为

$$\begin{aligned} P &= m |\ddot{y} + \ddot{\delta}_g|_{\max} \\ &= mg \cdot \frac{|\ddot{\delta}_g|_{\max}}{g} \cdot \frac{|\ddot{y} + \ddot{\delta}_g|_{\max}}{|\ddot{\delta}_g|_{\max}} \\ &= K_H \beta W \end{aligned} \quad (6-8)$$

式中, g 为重力加速度; W 为体系的总重量。

K_H 定义为水平地震系数

$$K_H = |\ddot{\delta}_g|_{\max} / g$$

β 定义为动力放大系数

$$\beta = \frac{S_A}{a_0} = |\ddot{\delta}_g + \ddot{y}|_{\max} / |\ddot{\delta}_g|_{\max}$$

式(6-8)为反应谱理论计算水平地震力的一般公式,在实际应用中要解决以下两个问题:

①水平地震系数的取值,应根据结构抗震设防的烈度水准选用。我国公路工程抗震设计规范规定:设计烈度 VII 度以上才进行抗震设防,相应于 VII, VIII 和 IX 度, K_H 分别取 0.1, 0.2 和 0.4。

② β 谱曲线的确定

图 6-5 所示为 Housner 在 1959 年发表的平均地震 $\beta = S_A/a_0$ 反应谱,它与强迫振动的 μ_d 和 Ω/ω 关系图非常相似(如图 1-24 所示),其反应峰值位置乃相对于地震波的卓越周期(波形的主要频率也称卓越频率的倒数)。所以,以动力学观点,结构地震反应是以卓越周期为主要成份的地震波对支承激励下的结构强迫振动。

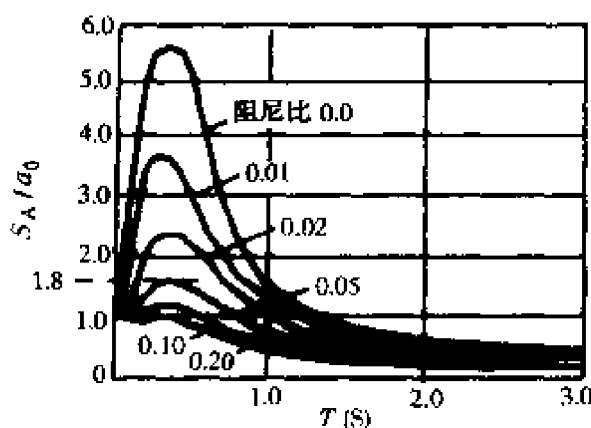


图 6-5 平均地震 S_A/a_0 反应谱

图 6-6 表示不同卓越周期的平均地震 β 反应谱的比较,明显反映出不同场地土对反应谱的影响。结构物所处的场地土特性是不相同的,因而规范在制定标准 β 反应谱时,必须根据场地土分类,分析相应于场地土分类的平均 β 反应谱的规律,作出它们的平均或外包的谱曲线。图 6-7 所示为我国《公路工程抗震设计规范》(JTJ004-89)所采用的标准 β 谱曲线。谱曲线的阻尼比采用 0.05。

(3) 结构综合影响系数

上述讨论的反应谱是以弹性体系为对象,因此称为弹性反应谱理论。结构在地震作用下一般进入弹塑性阶段,结构进入塑性阶段后其延性将起耗能作用,会减弱地震反应。因而在地震力计算中引入结构综合影响系数 C_2 ,以反映理论计算与震害现象的差

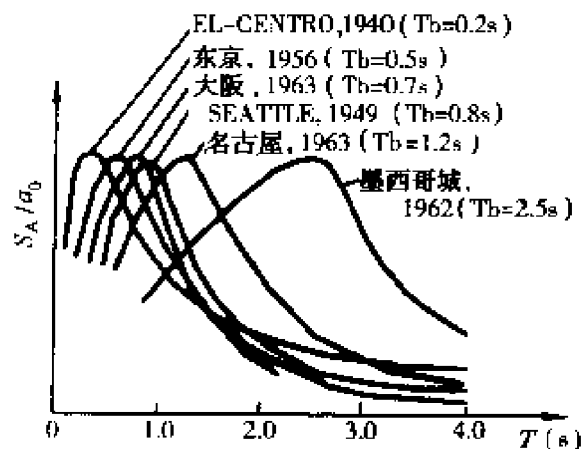


图 6-6 不同地震波的平均 S_A/a_0 反应谱

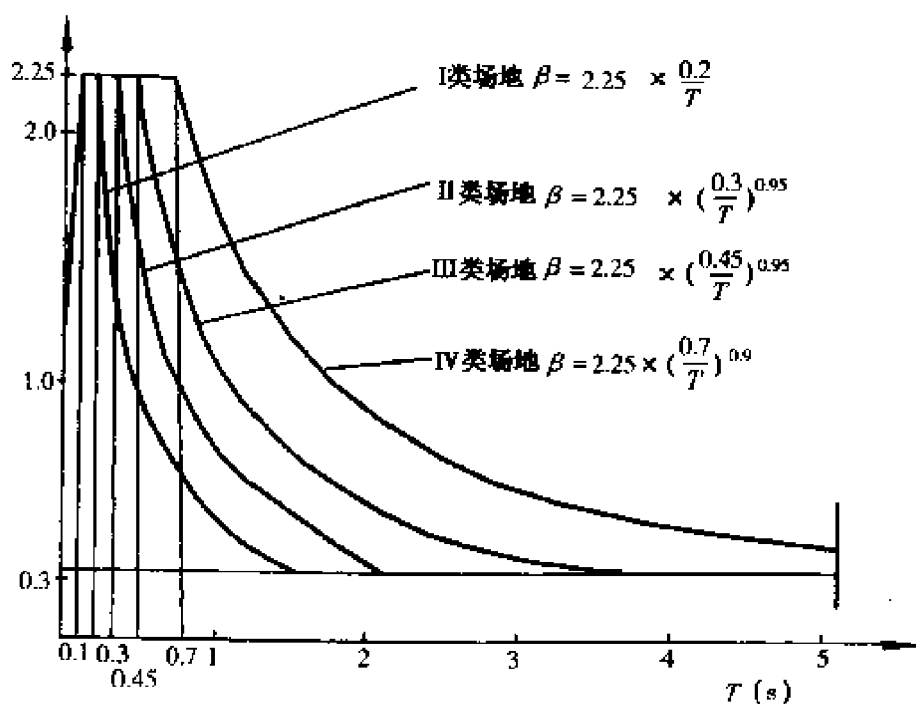


图 6-7 公路桥规动力放大系数 β 反应谱

异,但主要是考虑结构的延性耗能作用。各国规范对 C_z 的取值大约在 $1/\mu$ 与 $1/\sqrt{2\mu-1}$ 之间, μ 为延性系数。我国公路桥梁抗震设计规范中单质点体系采用反应谱理论计算地震力的一般形为

$$P = C_z \cdot K_H \cdot \beta \cdot W \quad (6-9)$$

(4)多质点体系的地震力计算公式

多质点体系可以应用单质点体系的设计标准 β 反应谱计算

地震力。当 n 个质点体系地震振动时,其振动方程以矩阵形式描述为

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -[M]\{I_x\}\ddot{\delta}_g(t) \quad (6-10)$$

式中 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别为 n 个质点体系的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, $\{\delta\}$ 为质点对地面的相对位移向量,是时间 t 的函数。

利用振型分解法可将方程(6-10)分解为按各个振型的独立振动的叠加。设质点位移列向量

$$\{\delta(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\phi\}_i q_i(t) = [\Phi]\{q\} \quad (6-11)$$

式中, $[\Phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \cdots \{\phi\}_n]$ 为振型矩阵; $\{\phi\}_i$ 为第 i 阶振型列向量; $\{q(t)\} = [q_1(t) q_2(t) \cdots q_n(t)]^T$, $q_i(t)$ 是不同的时间函数,称为第 i 阶振型对应的广义坐标。

令 ω_i 及 $\{\phi\}_i$ 分别为多质点体系无阻尼时的第 i 阶圆频率及其相应的振型,按多自由度振动理论,有

$$[K]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [M]\{\phi\}_i$$

又振型满足正交条件

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_i = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_i = 0 \quad (i \neq j)$$

同时设 $\{\phi\}_j^T [C] \{\phi\}_i = 0 \quad (i \neq j)$

将式(6-11)代入方程(6-10),再以 $[\Phi]^T$ 左乘式(6-10),利用上述正交条件,可得

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -\gamma_i \ddot{\delta}_g(t) \quad (6-12)$$

式中 γ_i 称为第 i 阶振型的振型参与系数, $\gamma_i = \{\phi\}_i^T [M] \{I\} / \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i$ 。

第 i 振型第 j 质点的位移 $\delta_{ji}(t) = \phi_{ji} q_i(t)$, 代入式(6-12), 得

$$\ddot{\delta}_{ji}(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\delta}_{ji}(t) + \omega_i^2 \delta_{ji}(t) = -\gamma_i \phi_{ji} \ddot{\delta}_g(t) \quad (6-13)$$

将上式与式(6-3)比较,显然可推得第 j 质点水平方向上由第 i 阶振型所引起的按反应谱理论计算的最大地震力为

$$P_{ji} = K_H \cdot \beta \cdot \gamma_i \cdot \phi_{ji} \cdot W_j \quad (6-14)$$

同理,在引入结构综合影响系数 C_Z 后,公路桥梁抗震设计规范中多质点体系地震力的计算公式为

$$P_{ji} = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot \gamma_i \cdot \phi_{ji} \cdot W_j \quad (6-15)$$

以各个振型为独立振动方程所求得的各项反应最大值的时刻并不都相同,因此各个振型上所求得的最大反应值是不能直接求代数 and 的。一般采用统计理论上的平方和开方的形式近似求得多质点体系的各项反应值。如以 $R_{\max}$ 表示广义的最大反应值,则

$$R_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_{i,\max}^2} \quad (6-16)$$

反应谱方法计算地震力时,设计过程仍是静态方法,还是以强度破坏为准则,仍是一阶段抗震设计方法。这往往给设计人员造成一种错觉,即不要提高结构延性能力,而只要增加结构的强度即可提高结构的抗震能力,这正是一阶段抗震设计方法最主要的缺陷。此外,反应谱理论无法反映许多实际的复杂因素,诸如大跨径桥梁的地震波输入相位差、结构的非线性二次效应、地震振动的结构—基础—土的共同作用等问题。同时, C_Z 取值依据尚欠科学,取值的分类过于笼统,不能确切反映结构的力学特性、构造的合理性、构件的延性性质和材料特性等因素。

3. 动态时程分析法

60 年代后,重要的建筑物、大跨径桥梁和其他特殊结构物采用多节点、多自度的结构有限元动力计算图式,把地震强迫振动的激振—地震加速度时程直接输入,对结构进行地震时程反应分析,这通称为动态时程分析。

动态时程分析法可以精确地考虑结构、土和深基础相互作用、地震波相位差及不同地震波多分量多点输入等因素建立结构动力计算图式和相应地震振动方程。同时,考虑结构几何和物理非线性和各种减、隔震装置非线性性质(如桥梁免震支座、特种阻尼装置等)的非线性地震反应分析更趋成熟与完善。由于发展了动态时程分析方法,使桥梁抗震计算从单一强度保证转入强度、变形

(延性)的双重保证,使结构工程师更清楚结构地震动力破坏的机理和正确提高结构抗震能力的途径,也为发展二阶段抗震设计方法提供了分析基础。

根据桥梁震害分析,桥梁结构地震反应的动态时程分析的输入方式主要采用地震加速度时程的水平分量(顺桥向和横桥向),只对大悬臂结构或大跨径柔性结构(如吊桥、斜拉桥)才考虑竖向分量的输入。输入形式可以采用同步单点输入,必要时可考虑不同步(有相位差)单点输入,或同步、不同步多点输入。每个输入点的加速度时程可以相同的或不同的。

目前,国内铁路和公路桥梁抗震设计规范仍然采用以反应谱理论为依据的第一阶段抗震设计方法,正在开展深入研究向二阶段抗震设计方法过渡。

6.2 桥梁主要地震振动及其力学图式

大量的桥梁震害表明:造成桥梁破坏的原因主要是由于地震使桥梁产生沿桥轴线的纵向水平振动和横向水平振动。竖向振动造成桥梁破坏的现象不多见。由于一般的桥梁都有顺桥向的对称轴线,因而其纵向水平振动和横向水平振动是相互独立的。从振动变形的性质来看,前者是一种平面挠曲振动,后者则是空间的侧向弯曲和扭转振动。鉴于桥梁的横向刚度和横向抗震能力一般较大,震害较轻,因此本节重点讨论水平地面运动引起的地震反应,并以纵向水平振动为主要内容。斜桥和弯桥比较复杂,这里不予讨论。

6.2.1 梁桥的水平地震振动

1. 梁桥的纵向水平地震振动

(1) 桥墩的平面挠曲振动力学图式

梁桥的地震损伤主要在桥墩和梁的支座,梁如果不坠落,极少损坏。因此在纵向水平地震振动中,中、小跨径的梁可以近似地当

作刚体来看待。这样,梁桥的纵向水平地震振动就归结为主要是桥墩及其基础的平面挠曲振动,在墩顶则为附有固定支座所管辖的桥跨结构的集中质量 M_L 。对于常用的公路梁桥桥墩和基础形式,根据基础与土的相互作用原理,可分别给出简化的动力学图式。

图 6-8 所示为采用扩大浅基础的简支梁桥桥墩的动力学图式。用三个弹簧来表示刚性基础相对于地基土的水平、竖直和转动三个位移自由度,并在墩顶处设一水平弹簧表示活动支座的摩擦力以及其它桥面构造的弹性约束作用。

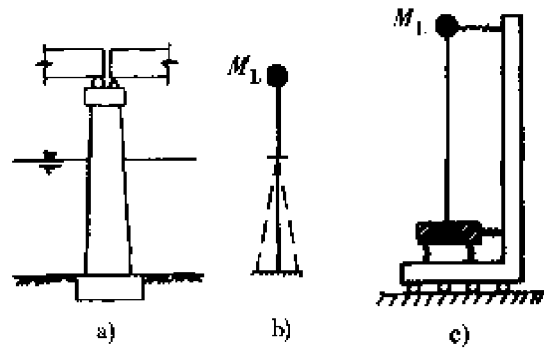


图 6-8 扩大浅基础梁桥桥墩动力学图式

图 6-9 所示为我国公路梁桥最常用的桩基础桥墩动力学图式。它是简化的图式,仅用四个自由度表示桩基与地基土之间的

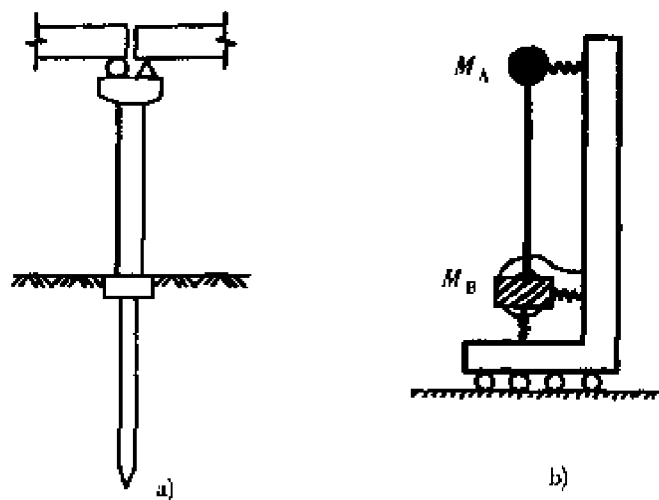


图 6-9 桩墩的动力学图式

相互作用。上部结构和墩身上半段的质量集中于墩顶,墩身下半段和土附加质量集中于墩底承台处。单排桩群的刚度置换成三个弹簧。当按反应谱理论对桩墩进行近似的抗震分析时,通常将桩基础在地面下的静力嵌固点近似看作完全固定。

采用沉井基础的桥墩,同样可用弹簧系统模拟其动力学图式,此时沉井可视为刚体,仅考虑其重心处的水平位移和转动两个自由度,如图 6-10 所示。

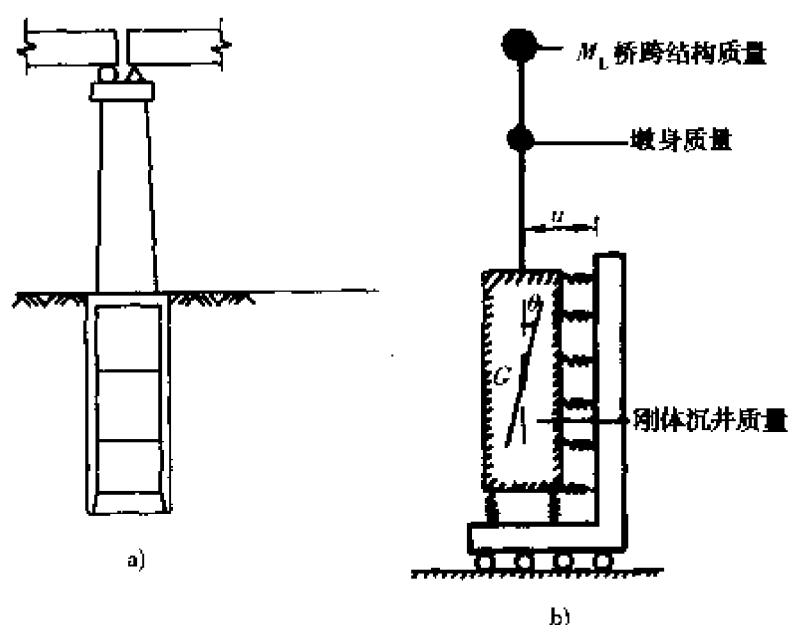


图 6-10 沉井基础桥墩的动力学图式

对于采用抗震制动墩的连续梁桥可采用图 6-11 所示的理想化的动力学图式。在两个伸缩缝之间的连续上部结构可视为刚体,两种不同类型的下部结构分别按较刚性的多排桩墩(制动墩)和将若干柔性的单排桩墩合并为一个复合桩墩,形成一个框架体系,它们各自的桩基仍可用弹簧系统模拟,也可参照图 6-9 进行简化以便于分析。

(2) 支座构造和抗震设施的影响图式

当支座构造具有完备而符合力学图式所要求的固定或活动性能时,梁桥各墩在强震时表现了单墩独立的振动特性。然而,实际公路工程中常用的中、小跨径的多孔公路梁桥大都采用橡胶支座

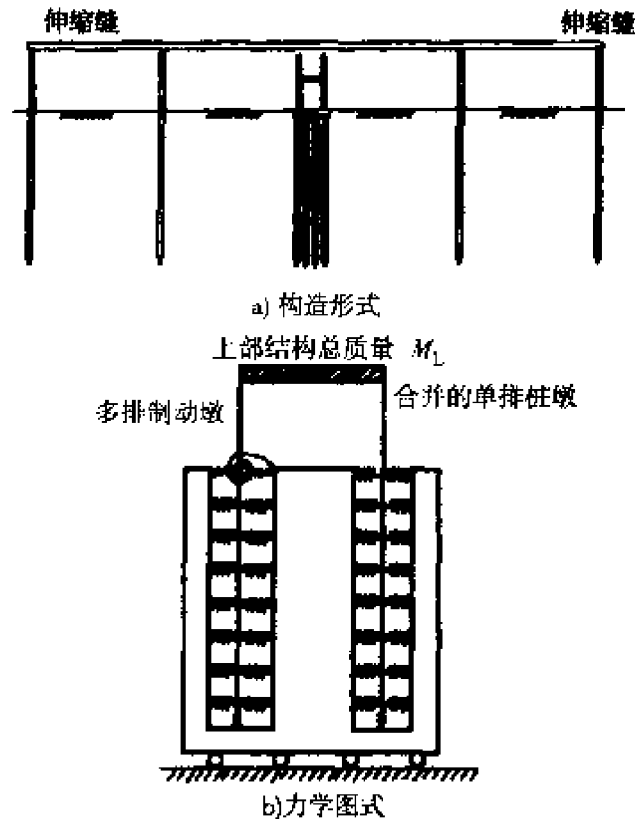


图 6-11 连续梁桥桩墩的动力学图式

甚至油毡支座。为了防止落梁,地震区的梁桥常加设简易的挡块以限制上部结构和墩台之间的纵向相对错位。当采用连续梁体系时,其支座构造往往不分固定和活动,而是从抗震设计的要求考虑全部采用有限制的可动滑板支座,以免地震力集中作用于某一桥墩,也有采用图 6-11 所示设置强大的制动墩来集中抵抗地震力,还有不少梁桥在可动支座处加设阻尼减震器。因此在进行地震反应分析时,必须考虑上述因素对力学图式的影响。

小跨径多孔简支梁桥在采用简易平板支座或油毡支座并加设刚性挡块情况下,由于上下部结构的允许相对纵向位移很小,地震时全桥将表现为相互耦连的整体振动。此时上部结构和墩台之间可近似地设为固定铰结(图 6-12a 所示)。显然,地震力将按各墩台的刚性进行分配。此类梁桥低墩受力大,破坏较为严重。实践表明,油毡支座的摩阻力小,强震时易被克服,造成上部结构的错位,互相撞击,而且计算图式也很不明确,在地震区一般不宜使用。

多孔简支梁桥当采用橡胶支座时,由于橡胶的柔性,可用弹簧系统模拟(图 6-12b 所示)。此时全桥将发生整体振动,不能按单墩单梁分析。设置纵向弹性挡块时也可采用类似的力学图式。

在活动支座处设置阻尼减震器是一种吸收能量、降低地震反应、减小各墩间的相对位移的有效措施。此时力学图式中相当于在各墩之间用一阻尼器联结在一起(图 6-12c)。

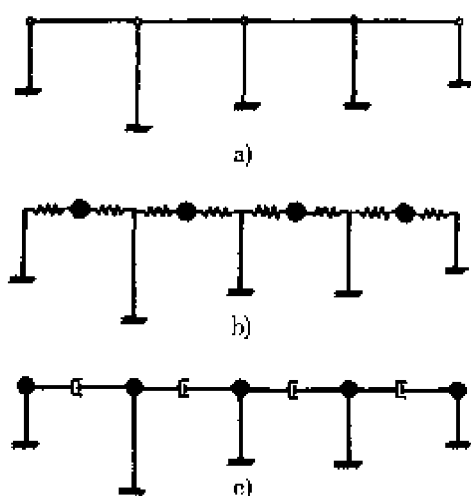


图 6-12 常用支座的简支梁桥动力图式

2. 横向水平地震振动

梁桥的横向水平地震振动一般除了上部结构的侧向弯曲振动以及桥墩在横向平面内的弯曲振动外总是兼有扭转振动。图 6-13a 表示两跨连续梁桥的一联。支座在横桥向不能移动,固定支座设于左边桥墩 A,活动支座设在桥墩 B、C,如箭头所示。在横向水平地震振动时,上部结构在水平面可视为一个由桥墩弹性支承的连续梁,但在固定支座的 A 墩处应是嵌固端,如图 6-13b 所示。

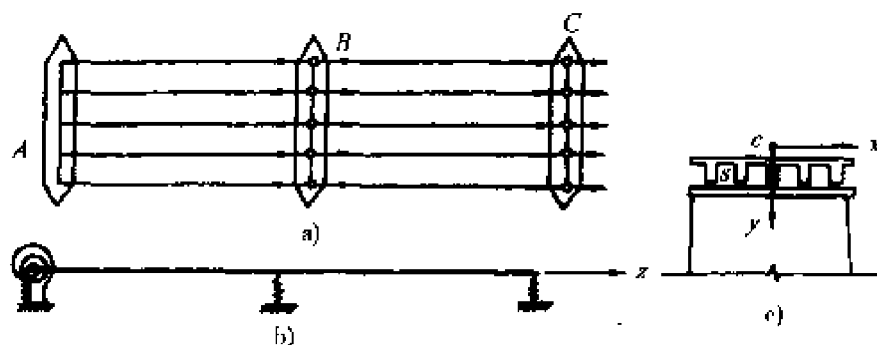


图 6-13 连续梁桥横向水平振动力学图式

示。这是因为各主梁的固定支座只容许整个桥跨结构产生和桥墩扭转角相一致的横向挠曲角。它的固端弯矩 M_A 对于桥墩 A 的作用就是扭矩。因此,桥墩 A 将必然发生横向弯曲(绕 Z 轴)和扭转

(绕 y 轴)的振动。当桥跨结构的横截面形状由横隔板所固定而保持不变时,它的扭转中心即横向弯曲中心 C 和截面形心 S 不重合。因此横向水平振动时,通过 S 点的横向水平惯性力将对 C 点产生力矩,对于桥跨结构的作用是扭矩。结果,桥跨结构不仅有横向水平的弯曲振动,还会有扭转振动。

对于多跨简支梁桥,情况基本与上述讨论相似。作为简化分析,可忽略上部结构固定支座端对桥墩的扭转作用,将上部结构和桥墩台间视为空间铰支(图 6-14 所示)。

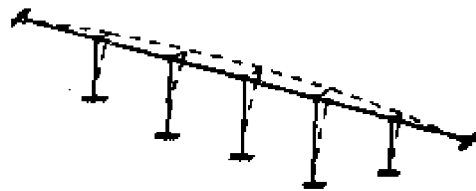


图 6-14 简支梁桥横向水平振动的简化动力学图式

震害调查和实例分析表明:由于一般实体桥墩的横向宽度比纵向厚度大得多,抵抗横向地震力的能力较大,在桥梁抗震设计中可不予考虑。但对于采用挑臂式墩帽的独柱或双柱式墩身的情况,要注意这种横向水平地震振动可能招致的震害。

6.2.2 拱桥的水平地震振动

1. 拱桥的纵向水平地震振动

拱桥的纵向水平地震振动总是和竖向地震振动结合在一起,形成平面挠曲振动,这是因为拱轴线上任意点的平面位移一般具有水平和竖向分量。

拱桥的震害表明:纵向水平地震振动与横向水平地震振动相比是较为不利的。特别是对于多孔连拱,纵向水平地震振动伴随着的墩台位移更为突出。

拱桥振动分析的力学图式应如实地反映上下部结构的共同作用,一般都采用和静力计算相同的力学图式。下部结构和基础的力学图式的处理方法与梁桥相仿,唯一可以简化的是上部结构中的拱上建筑部分。根据圬工单孔双曲拱桥模型试验研究,拱上建筑的

质量和刚度对整个拱桥上部结构自振频率的影响较大,而对基本振型的影响不大。从震害调查来看,在强震过程中,圬工拱桥的连接处极易开裂损坏,使拱上建筑的刚度作用在强震的最初几秒钟内迅速衰减。因此,为简化力学图式,可视拱上建筑的实际构造情况,或者完全忽略其刚度作用,或者将其部分刚度附加于主拱圈,采用仅有主拱圈的力学图式。但是对于拱桥的质量分布,应考虑拱上建筑的实际位置进行适当的处理。例如当按反应谱理论计算水平地震力时可近似地将全部拱上建筑的质量集中于拱顶截面中心处,而在计算竖向地震力时则将全桥质量附加于拱圈(图 6-15 所示)。

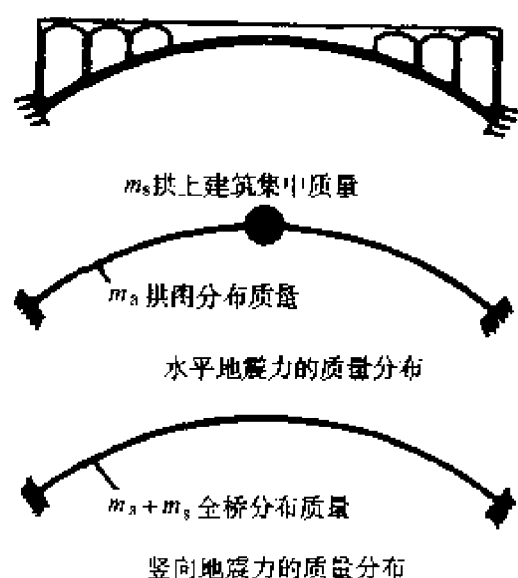


图 6-15 拱桥的纵向振动力学图式

多孔连拱的地震振动力学图式可取其静力分析图式。

2. 拱桥的横向水平地震振动

拱的横向水平弯曲振动总是和扭转振动结合在一起,因为拱的曲率使它的侧向弯矩和扭矩相互耦联。在力学图式上应考虑曲杆的空间扭转特征,保持拱上建筑的实际刚度作用和质量分布。大跨径拱桥由于宽跨比小,上部结构的侧向抗弯刚度和抗扭刚度相对较小,应当特别注意横向水平地震振动的反应分析。一般中、小跨径多孔连拱由于上部结构的侧向抗弯刚度较大,如桥墩较高或用柔性桩墩需进行抗震设计时,可忽略各孔的耦联影响而仅取

一个桥墩及其相连的两侧各半孔上部结构作为简化的力学图式，桥跨中央可视为可动的嵌固端(图 6-16 所示)。

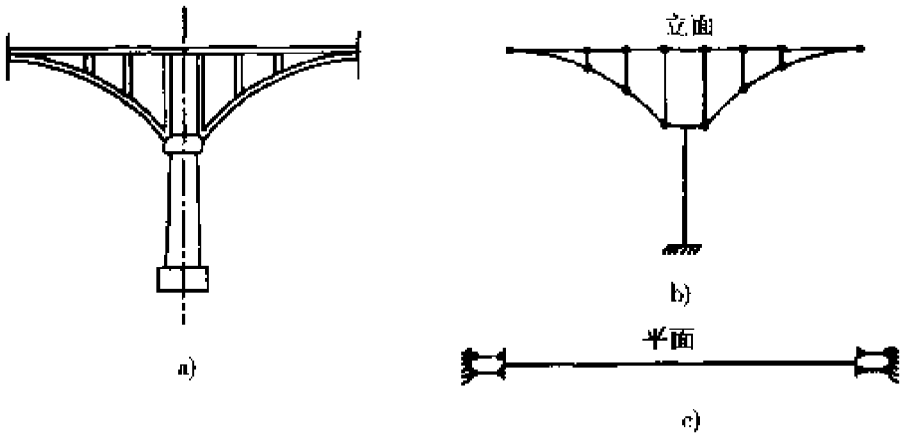


图 6-16 拱桥横向振动的简化力学图式

6.3 梁桥地震振动方程

6.3.1 梁桥平面挠曲地震振动方程

图 6-17 所示的扩大浅基础简支梁桥桥墩，若作为带集中质量的连续系统处理时，则这一系统的地震振动方程为

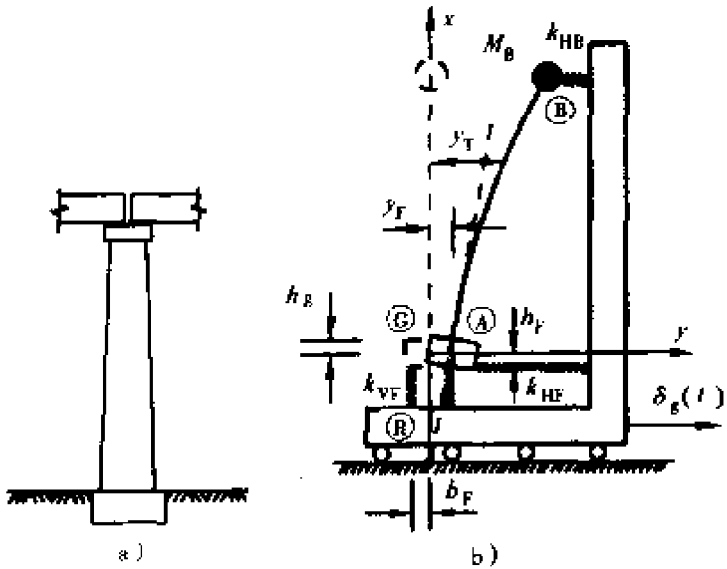


图 6-17 扩大浅基础桥墩的地震振动图式

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{墩身部分} \\
 &m(x)\ddot{y}_T + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y_T}{\partial x^2} \right] = -m(x)\ddot{\delta}_g \\
 &\text{基础水平位移} \\
 &M_F\ddot{y}_F + K_{HF}(y_F - h_F\varphi) = -M_F\ddot{\delta}_g \\
 &\text{基础转动} \\
 &J_F\ddot{\varphi} - K_{HF}h_F(y_F - h_F\varphi) + 2K_{VF}b_F^2\varphi = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

边界条件及连续性条件有

在墩底 A 点, $x = h_g$:

$$y_T(A) = y_F + h_g\varphi, \left(\frac{\partial y_T}{\partial x} \right)_A = \varphi$$

在墩顶 B 点, $x = x_B$

$$\left(\frac{\partial^2 y_T}{\partial x^2} \right)_B = 0$$

$$M_B\ddot{y}_T(B) - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y_T}{\partial x^2} \right]_B + K_{HB}y_T(B) = -M_B\ddot{\delta}_g$$

(6-18)

式中 δ_g ——地基水平位移;
 y_F ——基础重心的相对水平位移;
 y_T ——桥墩部分的相对水平位移;
 φ ——基础重心 G 的相对转角(R 点为旋转中心);
 M_B ——上部结构在墩顶的附加质量;
 $m(x)$ ——墩身分布质量;
 $EI(x)$ ——墩身截面的抗弯刚度;
 M_F ——基础质量,集中于重心处;
 J_F ——基础对其重心的转动惯量;
 h_g ——基础重心至墩底距离;
 h_F ——基础重心至水平弹簧的距离;

b_F ——两个竖直弹簧间距之半；

K_{HB} 、 K_{HF} 、 K_{VF} ——分别为墩顶和基础的水平和竖直弹簧系数。

上述各弹簧系数的取值可按一般静力计算公式由地基反力系数 K 估算。

图 6-18 所示为桩基础桥墩的动力学图式。其地震振动方程为

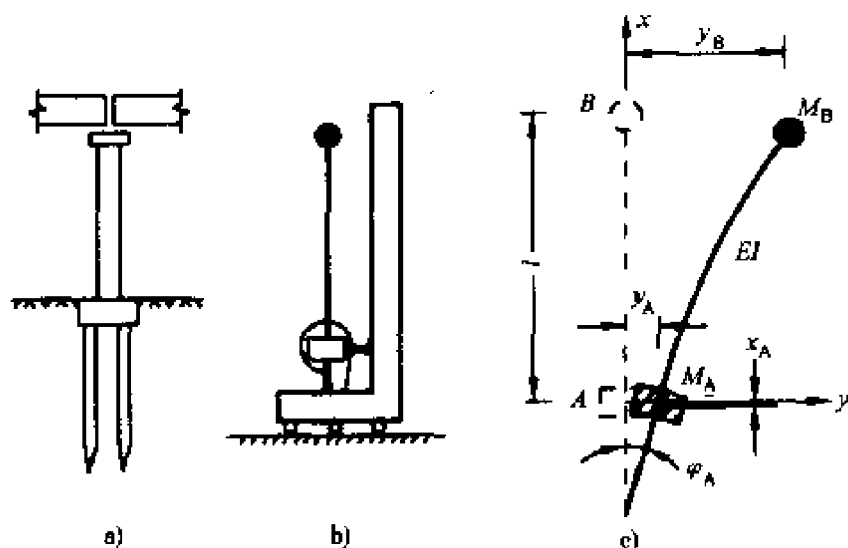


图 6-18 桩墩的地震振动图式

$$\left. \begin{aligned} M_B \ddot{y}_B + \frac{3EI}{l^2} (y_B - y_A - \varphi_A l) + K_B y_B &= -M_B \ddot{\delta}_g \\ M_A \ddot{y}_A - \frac{3EI}{l^2} (y_B - y_A - \varphi_A l) + (K_{pyH} + K_{SH}) y_A \\ &+ K_{ppH} \varphi_A + K_{pxH} x_A = -M_A \ddot{\delta}_g \\ (M_A + M_B) \ddot{x}_A + K_{p\varphi v} \varphi_A + K_{pyv} y_A + (K_{pxv} + K_{sv}) x_A &= 0 \\ J_A \ddot{\varphi}_A + (K_{SR} + K_{p\varphi R}) \varphi_A + K_{pyR} y_A + K_{pxR} x_A \\ &- \frac{3EI}{l} (y_B - y_A - \varphi_A l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

式中 δ_g ——地基水平位移；

y_A 、 y_B 、 x_A 、 φ_A ——分别标注于图 6-18 中；

M_A ——承台和下半段桥墩的集中质量；

M_B ——上部结构和桥墩上半段集中质量；

K_B ——墩顶水平弹簧系数；

K_{SH} 、 K_{SV} 、 K_{SR} ——分别为地基土对承台变位的抗力所引起的在水平、竖直和旋转弹簧中的弹簧系数。对于高桩承台，由于承台底面高出地面以上，它们应取零。

(y_A) (x_A) (φ_A)

$$\begin{matrix} (H) \\ (V) \\ (R) \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{pyH} & K_{pxH} & K_{p\varphi H} \\ K_{pyV} & K_{pxV} & K_{p\varphi V} \\ K_{pyR} & K_{pxR} & K_{p\varphi R} \end{bmatrix} \text{——桩群最一般的弹簧系数矩阵。}$$

当仅有单排直桩时，矩阵中若干副系数为零。

上述承台和桩群的弹簧系数可按照一般多排桩基的静力计算方法由地基反力系数 K 求得。

地基反力系数 K 值不仅与土壤类别、状态密切相关，而且与承台或桩的截面形状和尺寸也有关。因此，要对某种土壤提出一个确切的 K 值是比较困难的。如果能通过现场试验，从荷载和变位的关系曲线来反求地基的 K 值，是较为可靠的。

6.3.2 梁桥横向水平地震振动方程

图 6-19 所示为连续梁桥横向水平地震振动力学图式。由薄壁杆件的侧向挠曲和扭转的固有振动方程，引入在侧向水平地面运动激振下，作用在横截面形心处的水平地震力及其对扭转中心的扭转力矩即得侧向弯曲——扭转的地震振动方程为

$$\left. \begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\rho I_y}{g} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ a_y \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = - \frac{\rho F}{g} \ddot{\delta}_g \\ a_y \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GI_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\rho I_w}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ r^2 \frac{\rho F}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = - a_y \frac{\rho F}{g} \ddot{\delta}_g \end{aligned} \right\} (6-20)$$

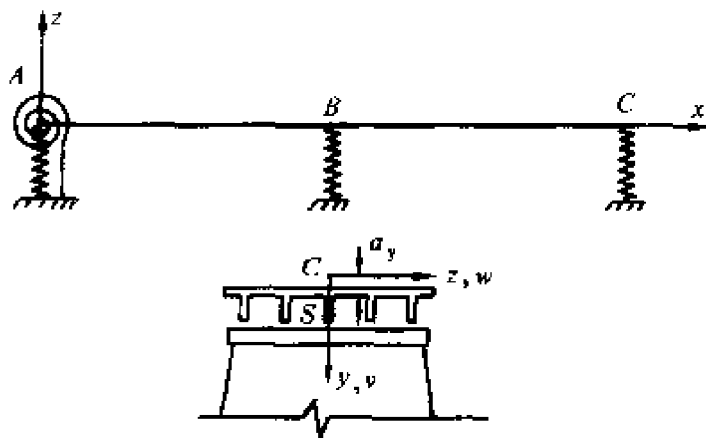


图 6-19 连续梁桥横向水平地震振动图式

式中 EI_y 、 EI_w 、 GI_d ——分别为上部结构的侧向弯曲、约束扭转和自由扭转刚度；

ρ ——梁的密度， $\frac{\rho F}{g} = m$ ；

r ——横截面的转动惯性半径，其平方为 $r^2 =$

$$\frac{I_y + I_z}{F} + a_y^2;$$

a_y ——横截面形心 S 和扭转中心 C 之间的距离；

w ——横向弯曲挠度；

θ ——绕形心 S 的扭转角。

由上式可知，正是 $a_y \neq 0$ 使侧向水平弯曲振动和扭转振动相耦合。

6.4 拱桥地震振动方程

本书以前对拱桥振动的研究都着重于汽车车辆动荷载下的竖向振动。由于地震时地面运动主要是水平方向的，故对拱桥地震振动的研究应注意水平和竖直两个方向的位移分量。

6.4.1 拱桥平面挠曲地震振动方程

为简化分析，采用曲率为常数的等截面圆弧拱在曲线坐标系

下的地震振动为例,研究拱桥地震振动。如图 2-1 所示,其平面挠曲的基本方程为式(2-11),即

$$\left. \begin{aligned} EI_x \left(u^{(4)} + \frac{w'''}{R} \right) - \frac{EF}{R} \left(w' - \frac{u}{R} \right) &= p_r \\ EF \left(w'' - \frac{u'}{R} \right) + \frac{EI_x}{R} \left(u''' + \frac{w''}{R} \right) &= -p_s \end{aligned} \right\}$$

式中 F 和 I_x ——分别为拱的截面积和拱平面内的惯性矩

u 和 w ——分别为拱的径向和切向位移。

当地震时的地面水平运动为 $\delta_g(t)$ 时,则所产生的水平惯性力应分别投影到切向和径向,于是总的惯性力为

$$p_r = -m[\ddot{v} + \sin(\alpha - \varphi)\ddot{\delta}_g]$$

$$p_s = -m[\ddot{w} + \cos(\alpha - \varphi)\ddot{\delta}_g]$$

代入式(2-11)后即得拱的平面挠地震振动方程为

$$\left. \begin{aligned} EI_x \left(u^{(4)} + \frac{w'''}{R} \right) - \frac{EF}{R} \left(w' - \frac{u}{R} \right) + \\ m\ddot{u} &= -m\sin(\alpha - \varphi)\ddot{\delta}_g \\ - EF \left(w'' - \frac{u'}{R} \right) - \frac{EI_x}{R} \left(u''' + \frac{w''}{R} \right) + \\ m\ddot{w} &= -m\cos(\alpha - \varphi)\ddot{\delta}_g \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

6.4.2 拱桥横向水平地震振动方程

拱桥横向挠曲——扭转基本方程为式(2-29),略去轴向力 N 的影响后,即

$$\left. \begin{aligned} \left(EI_y + \frac{EI_w}{R^2} \right) u^{(4)} - \frac{GI_d}{R^2} u'' + \frac{EI_w}{R} \theta^{(4)} - \\ \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' &= p_\xi \\ EI_w \theta^{(4)} - GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + \frac{EI_w}{R} u^{(4)} - \\ \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' &= m_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

式中 EI_y 、 GI_d 和 EI_w ——横截面的侧向抗弯刚度、自由扭转刚度和约束扭转刚度；

u 和 θ ——拱的横截面扭转中心处侧向位移和扭转角。

当地面发生横向水平运动 $\delta_g(t)$ 时，则在截面形心处所产生的惯性力对扭转中心引起扭转力矩，总的惯性力和惯性力矩为

$$p_x = -m(\ddot{u} + \ddot{\delta}_g)$$

$$m_x = -m(r^2\ddot{\theta} + a_y\ddot{\delta}_g)$$

式中 a_y ——横截面形心到扭转中心之间的距离，当截面具有两个对称轴时， $a_y = 0$

r ——横截面的转动惯性半径，其平方为

$$r^2 = \frac{I_x + I_y}{F} + a_y^2$$

将上式代入式(2-29)，得拱桥侧向弯曲——扭转的地震振动方程为

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{EI_w}{R^2} + EI_y \right) u^{(4)} - \frac{GI_d}{R^2} u'' + \frac{EI_w}{R} \theta^{(4)} - \\ & \frac{EI_y + GI_d}{R} \theta'' + m\ddot{u} = -m\ddot{\delta}_g \\ & \frac{EI_w}{R} u^{(4)} - \frac{EI_y + GI_d}{R} u'' + EI_w \theta^{(4)} - \\ & GI_d \theta'' + \frac{EI_y}{R^2} \theta + mr^2 \ddot{\theta} = -ma_y \ddot{\delta}_g \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

对于横截面为矩形的板拱或肋拱，可令 $I_w = 0$ ， $a_y = 0$ 来简化上式。

对上两节介绍的梁桥和拱桥的地震振动方程，要求其精确解析解是相当困难的，实用上都是用数值方法求解。但是，它们是模型试验研究的基础，动力相似条件将通过量纲分析，由这些方程导出。

6.5 桥梁按弹性反应谱理论的地震力简化计算

将实际桥梁结构模型化为有限自由度体系后，就可用有限元

法按反应谱理论进行地震力计算。不过长期以来,对于小跨径梁桥和拱桥已经发展了一套完整的更为简单的反应谱计算方法,并已被写入《公路工程抗震设计规范》(JTJ004—89),本节将对此作简单的介绍。

6.5.1 梁桥的地震力简化计算

对于简支梁桥,抗震设计的重点在桥墩。为了便于说明问题,这里只介绍等直悬臂梁的地震力求解方法。

桥墩在振动时的位能

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^H (y'')^2 dx \quad (6-23)$$

相应地,动能

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^H (\dot{y} + \dot{\delta}_g)^2 dx \quad (6-24)$$

将位移表示为广义坐标 $q_i(t)$ 和振型的线性叠加

$$y(x, t) = \sum \varphi_i q_i \quad (6-25)$$

并代入式(6-23)和式(6-24),利用振型正交性条件可使其得以简化为

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} EI \sum q_i^2 \int_0^H [\varphi_i''(x)]^2 dx \\ T &= \frac{1}{2} m \sum \dot{q}_i^2 \int_0^H \phi_i^2(x) dx + \\ &\quad m \dot{\delta}_g \sum \dot{q}_i \int_0^H \varphi_i(x) dx + \frac{m}{2} \dot{\delta}_g^2 H \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

得第 i 阶振型的地震振动方程为

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\gamma_i \ddot{\delta}_g \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 阶振型的频率} \\ \omega_i^2 = \frac{EI \int_0^H [\dot{\varphi}_i(x)]^2 dx}{m \int_0^H \varphi_i^2(x) dx} \\ \text{第 } i \text{ 阶振型的振动参与系数} \\ \gamma_i = \frac{m \int_0^H \varphi_i(x) dx}{m \int_0^H \varphi_i^2(x) dx} \end{array} \right\} \quad (6-27)$$

以第一阶振型为例,假设其振型近似表示为

$$\varphi_1(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2H} \quad (6-28)$$

代入式(6-27),即得第一阶频率和振动参与系数近似值

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = 0.3716 \frac{\pi^2}{H^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \gamma_1 = 1.6023 \end{array} \right\} \quad (6-29)$$

ω_1 比解析解大 4.4%。

第一振阶型分布地震力为

$$p(x) = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot \gamma_1 \varphi_1(x) \cdot mg \quad (6-30)$$

从而得墩底剪力为

$$Q = \int_0^H p(x) dx = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot W_1 \quad (6-31)$$

式中, $W_1 = 0.5823W$, W 为墩身重量,其余意义同规范。

当墩身为变截面时,一般应按多质点体系求解。但研究结果表明,对大多数实际的变截面桥墩,可以根据基底截面尺寸计算基本频率,仍然使用式(6-28)近似描述基本振型。当墩上部有集中质量,或需要考虑土——结构相互作用,或需作整体结构分析等较复杂情况时,宜按离散多自由度体系求解,详细的计算方法可参考规范。

6.5.2 单孔拱桥的地震力简化计算

拱桥是我国公路干线上的主要桥型之一,在地震区建造得很

多,除了少数大跨径或特别重要的拱桥应当进行精确的地震反应分析外,对于大量中、小跨径的拱桥,用反应谱理论进行近似计算,仍然具有重要的实用价值。

根据 20~100 米单孔拱桥基频的实测统计,基频均在 2.5~3.3Hz 以上,属于刚性结构。从单拱的振型序列看,第一振型是反对称的,第二、第三振型是对称的,第四振型是反对称的。在纵向水平地震动作用下,对称的第二、第三振型对拱结构的地震反应无贡献。第四振型虽是反对称的,但频率已较高,对拱地震反应的贡献相对较小。因此,有可能仅用第一振型来近似表达拱结构的动力响应。分析表明这样做的误差不大。因此,主要问题是确定拱的第一振型和频率。

除等截面圆弧拱外,拱的振动问题难于得到解析表达式,即使能得到,也十分复杂,不便应用。实际的拱轴线一般不是圆曲线,但实践表明,对于拱桥的地震反应分析,用矢跨比相同的圆弧拱代替是足够精确的。

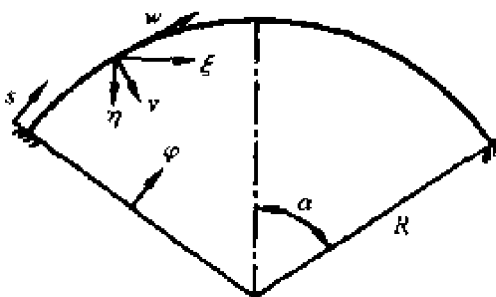


图 6-20 拱的位移

图 6-20 所示为等截面圆弧拱的平面挠曲振动位移示意图。

拱在振动时的位能用拱的切向和径向位移表示最为方便

$$V = \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 ds$$

式中 L 为拱弧全长。

若忽略振动时拱轴线的变形,即令

$$\epsilon = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{v}{R} = 0 \quad (6-32)$$

则位能改写为

$$V = \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{v}{R^2} \right)^2 ds \quad (6-33)$$

拱在地震振动时的动能则以拱的水平 and 竖向位移表示较为方便

$$T = \frac{m}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] ds \quad (6-34)$$

式中 ξ^* ——拱的绝对水平位移: $\xi^* = \xi + \delta_g$

ξ ——拱的相对水平位移;

δ_g ——地面纵向水平运动;

η ——拱的绝对竖向位移。

将位移表示为广义坐标 $q_i(t)$ 和振型的线性叠加

$$\left. \begin{aligned} v(s, t) &= \sum q_i(t) V_i(s) \\ \xi^*(s, t) &= \delta_g(t) + \sum q_i(t) \xi_i(s) \\ \eta(s, t) &= \sum q_i(t) \eta_i(s) \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

将式(6-35)代入式(6-33)和式(6-34), 得

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left[\sum q_i V_i''(s) + \frac{1}{R^2} \sum q_i V_i(s) \right]^2 ds \\ T &= \frac{m}{2} \int_0^L \{ [\dot{\delta}_g + \sum \dot{q}_i \xi_i(s)]^2 + [\sum \dot{q}_i \eta_i(s)]^2 \} ds \end{aligned} \right\}$$

利用振型正交条件可使上式中各项和的平方简化为各项平方的和, 于是有

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{EI_x}{2} \sum q_i^2 \int_0^L \left[V_i''(s) + \frac{V_i(s)}{R^2} \right]^2 ds \\ T &= \frac{m}{2} \dot{\delta}_g^2 \int_0^L ds + m \dot{\delta}_g \sum \dot{q}_i \int_0^L \xi_i(s) ds + \\ &\quad \frac{m}{2} \sum \dot{q}_i^2 \int_0^L [\xi_i^2(s) + \eta_i^2(s)] ds \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (6-37)$$

得第 i 振型的地震振动方程为

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\gamma_i \delta_g \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (6-38)$$

第 i 振型的频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_i^2 &= \frac{EI_x \int_0^L \left[V_i'(s) + \frac{1}{R^2} V_i(s) \right]^2 ds}{m \int_0^L [\xi_i^2(s) + \eta_i^2(s)] ds} \\ \text{第 } i \text{ 振型的振动参与系数} \\ \gamma_i &= \frac{m \int_0^L \xi_i(s) ds}{m \int_0^L [\xi_i^2(s) + \eta_i^2(s)] ds} \end{aligned} \right\} \quad (6-39)$$

再由图 6-20 中的位移分量几何关系,有

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= V_i \sin(\alpha - \varphi) + W_i \cos(\alpha - \varphi) \\ \eta_i &= V_i \cos(\alpha - \varphi) - W_i \sin(\alpha - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6-40)$$

显然上式满足 $\xi_i^2 + \eta_i^2 = V_i^2 + W_i^2$, 则

$$\omega_i^2 = \frac{EI_x \int_0^L \left[V_i'(s) + \frac{1}{R^2} V_i(s) \right]^2 ds}{m \int_0^L [V_i^2(s) + W_i^2(s)] ds} \quad (6-41)$$

即为熟知的圆弧拱频率计算公式。当然,对于变截面拱, $m(s)$ 和 $I_x(s)$ 应置于积分中。对于拱和无铰双铰圆弧拱,固有振动周期系数可分别由式(2-65)和式(2-71)求得,与 f/l 的关系列于表 2-1 中。

按照反应谱理论,拱的地震荷载应包括

$$\left. \begin{aligned} \text{竖直分量} \quad p_\eta(s) &= C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot \gamma_i \cdot \eta(s) \cdot g(s) \\ \text{水平分量} \quad p_\xi(s) &= C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot \gamma_i \cdot \xi(s) \cdot g(s) \end{aligned} \right\} \quad (6-42)$$

式中 C_Z ——综合影响系数;

K_H ——地震系数,与地震烈度有关;

β ——动力系数,由基本周期 T_1 及场地类别查标准反应谱求得;

$\eta(s)$ 、 $\xi(s)$ ——分别为竖向和水平振型位移,可按式(6-40)由 $V(s)$ 和 $W(s)$ 换算;

$g(s)$ —— s 点的拱单位长度重量。

由于拱桥为超静定结构,设计手册中又无水平荷载作用下的影响线表,因此,即使给出 γ_i 、 $\xi(s)$ 和 $\eta(s)$ 的数值,由地震荷载计算地震反应的内力还是不方便的。我们可通过积分可直接给出拱圈各控制截面的内力反应。

截面 j 点的弯矩反应为

$$M_j = \int_0^L [p_\eta(s) \gamma_j^M(s) + p_\xi(s) x_j^M(s)] ds$$

式中 $\gamma_j^M(s)$ —— j 截面在单位竖向荷载作用下的弯矩影响函数,即大家熟知的拱的弯矩影响线;

$x_j^M(s)$ —— j 截面在单位水平荷载作用下的弯矩影响函数,可由力法求得。

将(6-42)代入上式,得等截面拱($g = \text{常数}$)的弯矩反应

$$M_j = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot m_j W \cdot l \quad (6-43)$$

式中 W ——全桥总重, $W = gL$;

l ——拱桥计算跨径;

m_j —— j 截面第一振型的弯矩反应系数:

$$m_j = \frac{\gamma_i}{L} \int_0^L \left[\eta(s) \frac{\gamma_j^M(s)}{l} + \xi(s) \frac{x_j^M(s)}{l} \right] ds$$

同理,可得

剪力:

$$Q_j = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot q_j W \quad (6-44)$$

式中 $q_j = \frac{\gamma_i}{L} \int_0^L [\eta(s) \gamma_j^Q(s) + \xi(s) x_j^Q(s)] ds$

轴向力

$$N_j = C_Z \cdot K_H \cdot \beta \cdot n_j W \quad (6-45)$$

式中 $n_j = \frac{\gamma_i}{L} \int_0^L [\eta(s) \gamma_j^N(s) + \xi(s) x_j^N(s)] ds$

按(6-40) ~ (6-45)各式编成程序即可算得各内力反应系数与矢跨比 $\frac{f}{l}$ 的关系,应用十分方便。对于等截面无铰拱,发生最大内力反应的控制截面在拱脚,表 6-1 为无铰拱拱脚截面的三个内力反应系数。

表 6-1

$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
m_k	0.0405	0.0283	0.0218	0.0177	0.0150	0.0130	0.0115	0.0102
q_k	0.256	0.198	0.159	0.133	0.114	0.099	0.088	0.079
n_k	0.067	0.055	0.042	0.033	0.026	0.021	0.017	0.014

以上所讨论的内容均以裸拱为力学图式,即假设全桥连同拱上建筑的重量全部附加于拱圈。如果按图 6-15 所示的力学图式来考虑拱上建筑实际质量分布的影响,可引入参数

$$\mu = \frac{M_s}{M} = \frac{W_s}{W}$$

称为拱上建筑重量与全桥重量之比,仍取同样的近似振型函数,但在动能表达式中记入 M_s 的影响项,即可求得相应的内力反应系数。

6.6 确定性的桥梁地震反应分析

在确定性地震反应分析中,把研究的桥梁结构看作一个“系统”,在采用有限单元法时,把结构处理为若干离散单元在有限个节点处连接起来的一个集合体;而把地面运动作为确定的时间过程,看成是对系统的输入,系统的输出即是地震反应。因而在分析时要注意下面三个关键问题:

1. 确立桥梁结构有限元的力学图式及各离散单元的力学特性,建立相应的地震振动方程;

2. 选择合适的地震记录和输入模式;

3. 地震振动方程的计算方法。

本节着重从有限元方法上研究上述三个问题。

6.6.1 多自由度体系地震振动方程

根据达朗伯原理,按照有限单元法可知,总体结构上所有有限元的节点位移列向量 $\{\delta\}$ 相应的力向量的动态平衡可表示为

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -[M]\{I_x\}\ddot{\delta}_g(t) \quad (6-46)$$

式中各个矩阵的处理分述如下:

1. 结构总体质量矩阵 $[M]$

在有限元法中,单元的质量矩阵 $[m]^e$ 可表示为

$$[m]^e = \int_0^l [N]^T m [N] dx \quad (6-47)$$

式中, m 为单元上每单位长度上的质量, $[N]$ 是位移模式函数。总质量矩阵 $[M]$ 即由各单元质量矩阵经坐标变换后聚合而形成。应用位移模式函数推导的质量矩阵称为一致质量矩阵。在实际的结构分析中,一般都根据计算者自己的判断,按一定的方式,直接将整个单元的质量人为地集中(堆聚)在单元节点上,从而使具有非零的非对角元素的一致质量矩阵蜕化为对角矩阵,称为集中质量矩阵。

显然,采用集中(堆聚)质量矩阵计算工作量小得多。大量计算表明,其计算结构动力特性有时甚至比一致质量矩阵还好些。而采用一致质量矩阵时,结构频率计算值偏高,这是因为一致质量矩阵的计算中包括 $[N]$,刚度矩阵 $[K]$ 的计算中则包括 $[N'']$,显然 $[N'']$ 的计算精度比 $[N]$ 差,在 $[M]$ 和 $[K]$ 计算精度不同时,就导致了结构频率计算值偏高。

2. 地震力质量矩阵 $\{G\}$

地震力质量矩阵和惯性力质量矩阵不同。因为惯性力是和结构的位移加速度成正比,而地震力则和地面运动加速度成正比。对一般的桥梁,可假定地面运动加速度在结构各节点上都相同。

因而,当式(6-46)中的惯性力项上的 $[M]$ 采用集中质量矩阵,则单元长度上分布的地震力为 $-m\ddot{\delta}_g(t)$,它的等效节点地震力就相当于将单元质量向两端节点堆聚并乘以地面运动加速度 $\ddot{\delta}_g(t)$,即 $-[M]\{I_x\}\ddot{\delta}_g(t)$,式中 $\{I_x\}$ 为对应于水平位移自由度取1,其余为零的列向量。

如惯性力项上的 $[M]$ 采用一致质量矩阵,由于惯性力在单元长度上分布为非均值,而地震力的分布为均值。显然地震力项和惯性力项中的质量矩阵不能用同一个符号表达,应将式(6-46)中右端的 $[M]\{I_x\}$ 换以 $\{G\}$ 。在有限元法中,单元节点等效地震力为

$$\{Q\}^e = -\{g\}^e \ddot{\delta}_g(t) \quad (6-48)$$

式中, $\{g\}^e = \int_0^l [N]^T m dx$ 即地震力单元质量矩阵。对所有单元连接节点上的地震力质量矩阵相加,即可得地震力总质量矩阵 $\{G\}$ 。

3. 阻尼矩阵 $[C]$

结构材料的基本阻尼特性通常是不易确切知道的,一般是通过实测或者观察同类结构的阻尼性态进行比较,从而假设相应的阻尼比应用于振动方程的分析。有限元分析中,当采用振型分解法时,常假定阻尼矩阵 $[C]$ 同样满足振型的正交性条件,即

$$\{\phi\}^T [C] \{\phi\}_i = 0 \quad (i \neq j)$$

瑞雷(Rayleigh)曾提出阻尼矩阵采用质量矩阵与刚度矩阵的线性组合,必满足正交性条件,即

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (6-49)$$

式中, a_0 和 a_1 为任意常数。如定义

$$\left. \begin{aligned} M_n^* &= \{\phi\}_n^T [M] \{\phi\}_n \\ K_n^* &= \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_n \\ C_n^* &= \{\phi\}_n^T [C] \{\phi\}_n = 2\zeta_n \omega_n M_n^* \end{aligned} \right\} \quad (6-50)$$

分别为第 n 阶振型的广义质量、刚度和阻尼,则由式(6-49)可得

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_n} + a_1 \omega_n \right) \quad (6-51)$$

式中, $\omega_n = \sqrt{\frac{K_n^*}{M_n^*}}$, 第 n 振型的振动频率。

应注意到, 当阻尼矩阵只正比于质量矩阵时, 阻尼比与振动频率成反比, 高阶振型的阻尼就非常小; 同样, 当阻尼矩阵只正比于刚度矩阵时, 阻尼比正比于频率, 高阶振型的阻尼非常大, 这就使结构的高阶振型对结构动力反应的影响减弱甚至消除了。因而在实际应用中, 常采用线性组合或正比于质量矩阵的阻尼矩阵。一般地说, 结构的基本振型或几个较低振型对结构动力反应的影响是主要的, 没有必要采用其他更复杂形式的阻尼矩阵。

系数 a_0 和 a_1 可由给定的第 i 、第 j 阶振型的阻尼比 ζ_i 、 ζ_j 反算得到:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2 \frac{\zeta_i \omega_i - \zeta_j \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \omega_i \omega_j \\ a_1 &= 2 \frac{\zeta_i \omega_i - \zeta_j \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-52)$$

4. 刚度矩阵 $[K]$

如果结构单元恢复力特性是弹性的, 弹性刚度矩阵已为大家所熟知, 这里不再赘述。由于桥梁结构构件的弹塑性性质在强烈地震作用下, 结构构件将进入弹塑性阶段。弹性假定已不可能描述结构进入塑性时的逐步开裂、损坏甚至倒塌的全过程。图 6-21 所示为几种常用的恢复力模型。相应地, 刚度矩阵将因为采用弹塑性假设而成为变系数的, 也即随不同地震时刻, 结构可能处于弹性阶段或弹塑性阶段。按照弹塑性恢复力关系求得的结构动力反应是确定性弹塑性地震反应。

6.6.2 选择合适的地震记录和输入模式

结构物的地震反应主要与下面三个特性有关, 即

1. 结构物的振动特性;
2. 地基的振动特性;
3. 地基、基础与结构物的相互作用特性。

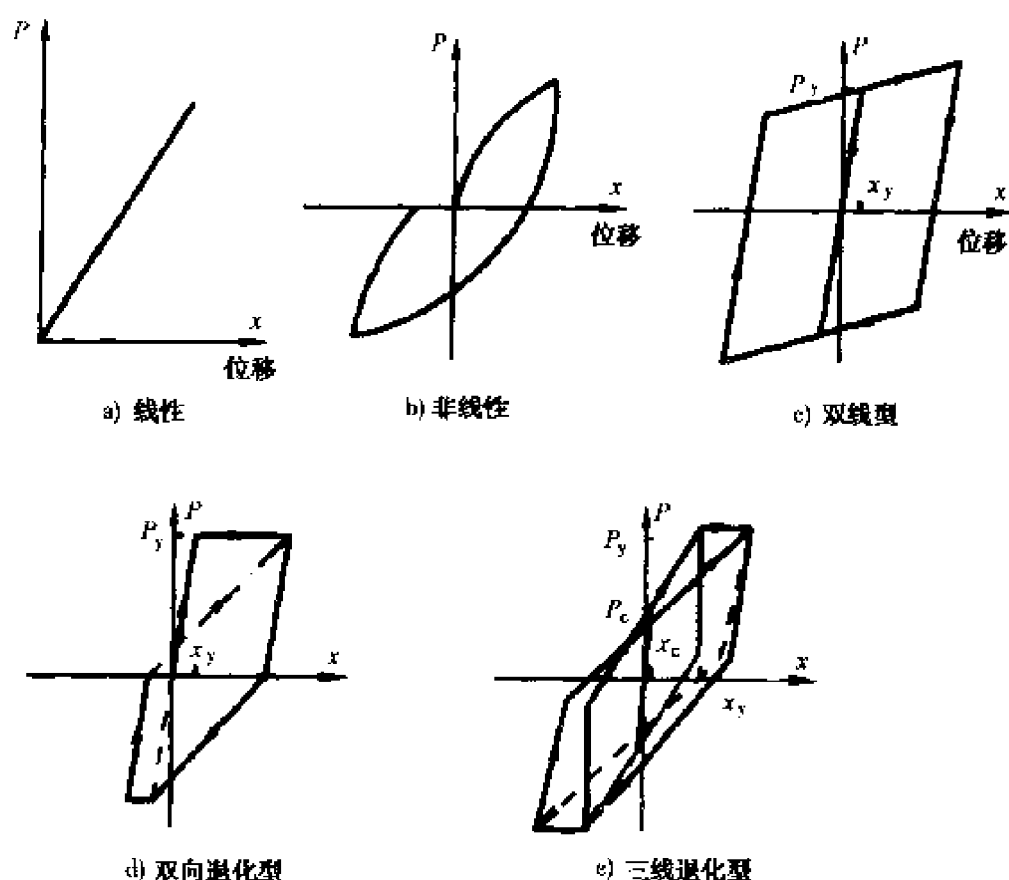


图 6-21 常用的几种恢复力模型

国内外的震害调查表明,工程结构破坏不但与地震规模、震中距离和震源深度等因素有关外,很大程度上与场地土的土质条件有密切关系。因为地基土的土质条件不一,地震波经土层向地面传播时,地基本身的振动与输入到地面结构的振动也都不一样。所以,在研究结构的确定性地震反应分析时,必须根据场地土与土质的振动特性选择合适的地震记录作为振动系统的输入。在实际的结构地震分析中,选择合适的地震加速度时程记录一般有四种方法,简述如下:

1. 国际上常用的地震加速度记录,例如 EL - centro 波、Taft 波等。在使用时必须注意测得该记录所在地的场地地质条件与所计算的桥梁所在地的场地地质条件的相近性。

2. 在结构所在地震区缺乏强震观测的地震记录时,可采用相似场地土与土质条件下已观测到的其他地区的地震记录。地面运

动有三个主要特征,即地震加速度幅值、卓越周期和持续时间。因而,可以根据已知的地震记录的最大加速度及其卓越周期,以线性放大或缩小来模拟所要求输入地震记录的加速度幅值与卓越周期,持续时间如需要加长,一般采用重复原地震记录而获得,此即强地震模拟的工程方法。考虑到地震记录的随机性,在确定地震反应分析中,常同时采用几条地震记录输入,比较结构地震反应结果。

3.可用规范反应谱(以场地土分类的 β 谱曲线)为目标合成人工规范化地震波作为输入地震记录。

4.对于重要性结构物(或生命线工程)除了可以采用上述方法选择合适的地震记录外,更合理的应该作结构场址上的地震危险性分析,对该场址上强地震动作经验性和理论性的估计,通过数学力学等解析方法计算基岩、覆盖土层中地震加速度时程作为输入地震波。

除了选择合适的地震记录外,在结构反应分析中还应确定地震记录输入模式。式(6-46)的一般多自由度体系地震振动方程是假定整个结构基底的所有支承点上的水平地面运动都是相同的,即输入的水平地震波是一样的。对于桥梁长度比地震波(主要指指面波)波长小很多的中、小跨桥梁,这个假定是符合实际的。如桥长或单跨跨径很大的桥梁,每个支承点上输入的地震波 $\delta_{g_i}(t)$,可能因每个支承点下场地土的显著差别而不同,或可能地震波从桥一端沿桥纵轴向传播至另一端,此时波形可能不变但产生各支承点上输入地震波有滞后现象,即相位差。又如桥梁墩台具有深基础时,在基础不同深度上的输入地震波,由于覆盖土层土质条件不同亦可能不同,分析中称之为多点激振。显然多点激振更加复杂,计算工作量更大,也更能反映出桥梁结构地震反应真实状态。

6.6.3 地震振动方程的计算方法

地震振动方程(6-46)是二阶常系数(线性)或变系数(非线性)的微分方程,右端项输入的地震波是不规则的、难以用确定的函数式表达的一组以 Δt 时间间隔的数字记录。该方程的计算方法一

般有下列三类。

1. 振型分析法:只适用于线性地震反应分析,即其地震振动方程是二阶常系数微分方程组,采用振型坐标对微分方程组解耦,使成为每个振型的独立微分方程,然后对每个振型(实用上常取前几个振型)进行杜哈美积分中,一般可采用分段数值积分法。

2. 直接积分法:用数值积分法对线性或非线性地震振动方程求结构反应的时程解。一般有龙格—库塔法、等加速度法、线加速度法、Newmark β 法和 Wilson θ 法。

3. 增量平衡方程逐步积分法:将地震振动方程表示为 Δt 时间间隔内的增量平衡方程

$$[M]\{\Delta\delta(t)\} + [C]\{\Delta\dot{\delta}(t)\} + [K]\{\Delta\delta(t)\} = -[M]\{I_x\}\Delta\ddot{\delta}_g(t) \quad (6-53)$$

然后采用逐步迭代的数值分析求结构反应的时程解。

上述方法在一般的有限元方法参考书中均有介绍,同时也有相当成熟的应用程序,这里不再详述。

6.7 长、大桥梁多点激振及行波效应

在上节中讨论的地震反应分析中,结构地震振动方程(6-46)是在假设整个结构受到相同的地面运动的前提下建立的。实际上,单跨越过大江的斜拉桥、吊桥、拱桥,左右岸可能位于显著不同的场地土上,或连续多跨拱桥或连续梁的桥墩也可能处于不同的场地土上,由此导致各支承处输入地震波的不相同,在地震分析中就要考虑多支承不同激振,简称多点激振。如果场地土情况变化不大,也可能因地震波沿桥纵轴向先后到达的时间差,也要考虑各支承输入地震波的相位差,简称行波效应。显然,地震波的相位差也是多点激振另一形式,即

$$\delta_{gi}(t) = \delta_{g0}\left(t - \frac{x_i}{c}\right) \quad (6-54)$$

式中, δ_{g0} 为原始地震波记录, c 为地震面波的传播速度, x_i 为 i 支

承距第一个支承点(输入原始地震记录)的距离。

例如,一座 700 多米长在含砂砾石地基上的多跨桥梁,设面波的速度 $c = 300\text{m/s}$, 显见后一个桥墩(台)与第一个桥墩(台)的地震波的相位差就有两秒多,这是不可忽视的。

因而,结构各个支承受波形不同或时间先后的地震地面运动时的结构反应均是多点激振问题。

6.7.1 多点激振的桥梁地震振动

结构力学图式仍采用有限元离散体系,集中堆聚质量。设输入 n 个支承的地震地面运动为

$$\{\delta_g\} = \{\delta_{g1} \ \delta_{g2} \cdots \delta_{gn}\}^T \quad (6-55)$$

支承处地面运动位移引起的结构各节点的拟静力位移为

$$\{\delta_{OB}\} = [R]\{\delta_g\} \quad (6-56)$$

式中, $[R]$ 为 $\{\delta_g\}$ 对 $\{\delta_{OB}\}$ 的影响矩阵。若支承处地面运动输入相同,影响矩阵即为单位矩阵 $[I_x]$, 标脚 x 是指结构反应只讨论考虑纵向的地震激振。

结构总位移 $\{\delta\}$ 应包括结构的动力反应相对位移 $\{\delta_B\}$ 和拟静力位移 $\{\delta_{OB}\}$, 将结构全位移向量 $\{\delta\}$ 以非支承处与支承处进行矩阵分块,并各以下标 Bt 与 g 表示,则

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{Bt} \\ \delta_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_B \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{OB} \\ \delta_g \end{Bmatrix} \quad (6-57)$$

结构的点点激振的地震振动方程则可写成

$$\begin{bmatrix} M_B & 0 \\ 0 & M_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_{Bt} \\ \ddot{\delta}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_B & C_{Bg} \\ C_{Bg}^T & C_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_{Bt} \\ \dot{\delta}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_B & K_{Bg} \\ K_{Bg}^T & K_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{Bt} \\ \delta_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_g \end{Bmatrix} \quad (6-58)$$

式中, $\{\ddot{\delta}_{Bt}\}$ 、 $\{\dot{\delta}_{Bt}\}$ 和 $\{\delta_{Bt}\}$ 分别是结构非支承处自由度的绝对加速度、速度和位移向量; $[M_B]$ 、 $[C_B]$ 和 $[K_B]$ 是相应的质量、阻尼和刚度矩阵; $\{\ddot{\delta}_g\}$ 、 $\{\dot{\delta}_g\}$ 和 $\{\delta_g\}$ 为支承处自由度的绝对加速度、速度和位移向量; $[M_g]$ 、 $[C_g]$ 和 $[K_g]$ 为相应的质量、阻尼和刚度矩阵。

$\{F_g\}$ 为支承反力。

将式(6-56)和式(6-57)代入式(6-58),可得

$$\begin{aligned} [M_B]\{\ddot{\delta}_B\} + [C_B]\{\dot{\delta}_B\} + [K_B]\{\delta_B\} = & -[M_B][R]\{\ddot{\delta}_g\} \\ & -([C_B][R] + [C_{Bg}])\{\dot{\delta}_g\} - ([K_B][R] + [K_{Bg}])\{\delta_g\} \end{aligned} \quad (6-59)$$

上式为结构非支承节点系统的动力相对位移分量的地震振动方程,右端最后一项是反映拟静力位移的静力平衡条件,因而

$$([K_B][R] + [K_{Bg}])\{\delta_g\} = 0 \quad (6-60)$$

因此,有影响矩阵

$$[R] = -[K_B]^{-1}[K_{Bg}] \quad (6-61)$$

如果采用阻尼矩阵只与刚度矩阵成正比,显然式(6-59)右端第二项也将为零;如果阻尼矩阵只与质量矩阵成正比或是质量矩阵与刚度矩阵的耦合,则该项不为零。R. W. Clough, J Penzien 在《Dynamics of Structure》中建议忽略此项影响,则式(6-59)演变为

$$[M_B]\{\ddot{\delta}_B\} + [C_B]\{\dot{\delta}_B\} + [K_B]\{\delta_B\} = -[M_B][R]\{\ddot{\delta}_g\} \quad (6-62)$$

此式与式(6-46)的差别就在于多点激振乃利用影响矩阵将地面运动的输入 $\{\ddot{\delta}_g\}$ 转换为各节点的位移加速度输入 $\{\ddot{\delta}_{OB}\} = [R]\{\ddot{\delta}_g\}$ 。

结构反映的总位移即绝对位移为

$$\{\delta_{Bt}\} = \{\delta_B\} + \{\delta_{OB}\} = \{\delta_B\} + [R]\{\delta_g\} \quad (6-63)$$

6.7.2 考虑行波效应地震反应的振型叠加法

前面已经知道,对于线性结构可采用振型分析法求解。为分析各阶振型在考虑行波效应时的特点,对于线性结构,方程(6-62)的解可用振型叠加法获得

$$\{\delta_B\} = \sum_{i=1}^N \{\phi\}_i q_i(t) \quad (6-64)$$

式中, ϕ_i 为第 i 阶振型, $q_i(t)$ 为第 i 阶广义坐标, N 为自由度数,

将上式代入式(6-62)并利用正交条件,第 i 阶广义坐标的运动方程则为

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = -\{\Gamma_i^p\}^T\{\delta_g(t)\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (6-65)$$

式中

$$\{\Gamma_i^p\}^T = \frac{\{\phi\}_i^T[M_B][R]}{\{\phi\}_i^T[M_B]\{\phi\}_i} \quad (6-66)$$

在两桥墩对称结构的情况下(图 6-22)

令

$$\{\delta_g\} = \{\delta_{g1} \quad \delta_{g2}\}^T \quad (6-67)$$

和

$$\{\Gamma_i^p\}^T = \{\Gamma_{i1}^p \quad \Gamma_{i2}^p\} \quad (6-68)$$

同时令

$$[\Gamma_i^p]^T\{\delta_g\} = \Gamma_i\delta_{gi}^p \quad (6-69)$$

式中, δ_{gi}^p 定义为各支承点地面加速度加权平均值,即考虑相位差效应的各振型地面加速度, Γ_i 为支承点同步激振时第 i 个振型的参与系数, $\{\Gamma_i^p\}$ 为反映激振相位差的振型参与矩阵。因此

$$\delta_{gi}^p = \frac{1}{\Gamma_i}(\Gamma_{i1}^p\delta_{g1} + \Gamma_{i2}^p\delta_{g2}) \quad (6-70)$$

对于反对称振型

$$\begin{aligned} \Gamma_{i1}^p &= \Gamma_{i2}^p = \frac{1}{2}\Gamma_i \\ \delta_{gi}^p &= \frac{1}{2}(\delta_{g1} + \delta_{g2}) \end{aligned} \quad (6-71)$$

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = -\Gamma_i\frac{1}{2}(\delta_{g1} + \delta_{g2}) \quad (6-72)$$

对于对称振型

$$\begin{aligned} \Gamma_{i1}^p &= -\Gamma_{i2}^p = \frac{\Gamma_i}{2} \\ \delta_{gi}^p &= \frac{1}{2}(\delta_{g1} - \delta_{g2}) \end{aligned} \quad (6-73)$$

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = -\Gamma_i\frac{1}{2}(\ddot{\delta}_{g1} - \ddot{\delta}_{g2}) \quad (6-74)$$

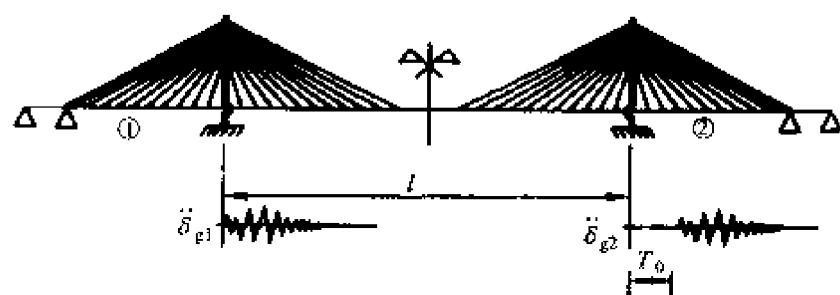


图 6-22 斜拉桥非同步激振

众所周知,在同步激振的情况下,由于水平地面运动的反对称性质,将只有反对称振型的贡献,而所有对称振型的参与系数将等于零。然而,在非同步激振的情况下,不但反对称振型,而且对称振型都有贡献(图 6-22)。结构的动力反应是两部分的叠加,此外还要加上结构的拟静力反应。

6.8 地基与基础的相互作用模型

前几节在讨论桥梁结构地震反应计算中,都假定地基是刚性的、不变形的,即假定地震时桥梁基础的运动与邻近自由场地一致,将在自由场地地面测得的地震记录,直接输入桥基的地表标高处,或下部结构的底面标高处,或桩基地面下的第一弹性零点处(按 m 法计算),而不考虑基础与地基的变形。这种假定对建造在基岩上的桥梁结构是合理的。在地震发生时,桥梁上部结构的惯性力通过基础反馈给地基,会使地基产生局部变形,在较硬土层中这种变形远远小于由地震波产生的地基变形,这种假设也是可行的。但是对于基础座落在软弱土层上的桥梁,将由于地基的变形,上部结构将产生摆动和移动,从而导致上部结构的实际运动和按刚性地基假定计算之间产生较大的差别。因此,对于建造在软弱地基上的桥梁,特别是斜拉桥、吊桥这类具有高耸塔墩的桥梁,在计算结构地震反应时考虑地基与结构的相互作用是完全必要的。

桥梁基础结构物,一般指置于土中的桩或群桩、沉井或沉箱。在现代大型桥梁结构中,广泛采用的是桩基,故本节主要讨论桩—土—结构的相互作用的问题。

考虑桩—土—结构相互作用的桩基桥梁结构地震反应分析,目前国内外广泛采用的是质量—弹簧理论,即集中质量法。它是将桥梁上部结构多质点体系和桩—土的多质点体系联合为一个整体,来建立整体耦联的地震振动微分方程组进行求解。

图 6-23 所示为桥梁桩基的动力学计算图式。其中弹簧和阻尼器模拟土介质的动力学性质,形成一个地下部分的多质点体系。一般来说,它可以考虑土介质的层理性、非线性、土阻尼特性等。在使用集中质量法时作了如下处理:

1. 假定土壤是有均匀各向同性的线弹性的水平层且阻尼与频率无关,各层土壤的性质可以是不同的,侧向土的性质在两个正交方向彼此无关,土抗力在轴向、侧向和扭转方向不耦合。属于小位移问题。

2. 等代土弹簧的刚度由土介质的 m 值计算。“ m ”法是我国公路桥梁设计中常用的一种桩基静力设计方法,所使用的土层的 m 值有实测数据为依据,其定义为

$$\sigma_{zx} = mzx_z \quad (6-75)$$

式中, σ_{zx} 是土体对桩的横向抗力, z 为土层的深度, x_z 为桩在 z 处的横向位移(即该处土的横向变位值),由此可求出等代土弹簧的刚度

$$K_s = \frac{P_s}{x_z} = \frac{A\sigma_{zx}}{x_z} = \frac{(ab_p)(mzx_z)}{x_z} = ab_pmz \quad (6-76)$$

式中, a 为土层的厚度, b_p 为桩柱计算宽度,按照规范的有关规定

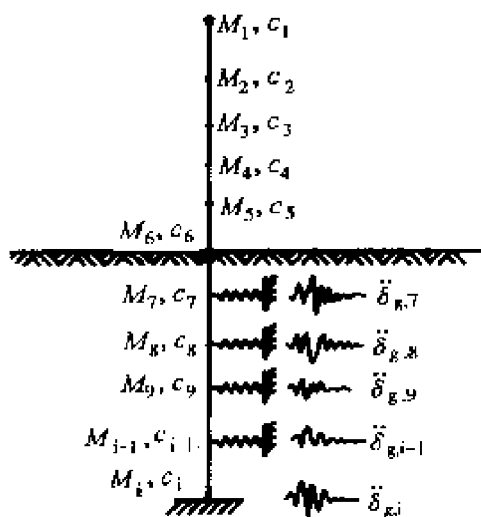


图 6-23 桩基动力图式

取值, m 取静力计算值的 2~3 倍。

3. 桩—土的阻尼系统仍采用瑞雷形式。

在桩基抗震研究中,一般是将桩视为弹性地基上的连续梁,而将群桩周围的土按照等刚度原则简化为抗压弹簧,弹簧的一端固定,另一端与桩相连,并没有考虑桩群中的各桩之间因土的共同振动而导致的相互影响。这种计算模式即为桩土连续梁模式(称之为模式一)。它在一定的条件下是可行的,如桩间距较大、特别是钻孔灌注桩时更合理。但是,由于模式一没有考虑桩间土共同振动的影响,因而导致桩与土的整体刚度降低,计算出的地震力响应值一般偏小,如桩间距较小、特别是打入桩的情况。为了考虑各桩之间因桩间土的共同振动而导致的相互影响,桩间土可以按等刚度原则模拟成为二力杆。于是群桩中桩与桩之间就有了纵横向的连接,从而把整个桩土结构模拟成了一个空间刚架,但土模拟的二力杆不能抗弯,此种计算模式即为桩—土的空间刚架模式(称之为模式二)。

研究比较结果表明:

1. 采用模式一或模式二对于计算出的墩中的地震响应力(弯矩)影响较小,两者差别总在 5% 以内。随桩径的增大,模式二与模式一的差别增大。

2. 两种模式中,尤其是在桩底处两者计算弯矩结果的差别较大。但由于设计桩时,桩顶处出现的控制弯矩的最大值的差别才是我们所关心的。一般情况下,桩中弯矩的最大值均是模式二较模式一稍大,特别是在桩数偏少或偏多的情况下更为显著。因此,对桩的抗震设计,当桩间距较小、特别是打入桩时,采用模式二较接近实际情况;当桩间距较大、特别是钻孔灌注桩时,采用模式一更为合理。

附录 I 拉格朗日 (Lagrange) 方程

在弹性结构体系中,支承着一组质量 $M_r (r=1,2,3,\cdots,j)$,并且承受着一组力 $F_r (r=1,2,3,\cdots,m)$ 的作用,同时又有阻尼存在。结构的变形 $y_r (r=1,2,3,\cdots)$ 可由一组广义坐标 $q_i (i=1,2,3,\cdots,N)$ 来确定。此时,结构的自由度数即为 N 。相应地,这些质量点和荷载点处的变形都必须用广义坐标 q_i 来确定。

假设引入一个虚变形,它是由一个广义坐标 q_i 的微小改变量形成的,用 δq_i 表示。根据虚功原理,在虚变形过程中,外力所作的功必须等于内部应变能的改变量。在动力体系中,应注意把实际荷载和惯性力两者所作的虚功统归为外力功,即有

$$\delta W_e + \delta W_{in} + \delta W_c = \delta V \quad (I-1)$$

式中, δW_e 为外荷载 F_r 所做的虚功;

δW_{in} 为惯性力所作的虚功;

δW_c 为阻尼力所作的虚功;

δV 为结构内部应变能的改变量。

上式中,有三项可简单用下式表达

$$\left. \begin{aligned} \delta W_e &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \delta q_i \\ \delta W_c &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial W_c}{\partial q_i} \delta q_i \\ \delta V &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \end{aligned} \right\} \quad (I-2)$$

式中, W_e 、 W_c 和 V 分别表示结构体系中由于广义坐标的微小改变量所产生的外力功、阻尼力功和结构内部的变形能。而 δW_{in} 则另行处理。根据定义,有

$$\begin{aligned}
\delta W_{in} &= - \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^j (M_r \ddot{y}_r) \frac{\partial y_r}{\partial q_i} \delta q_i \\
&= - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r \frac{\partial y_r}{\partial q_i} \right) \delta q_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r \frac{\partial \dot{y}_r}{\partial q_i} \delta q_i
\end{aligned} \tag{I-3}$$

结构体系的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r^2 \tag{I-4}$$

并且有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r \frac{\partial \dot{y}_r}{\partial \dot{q}_i} \\ \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r \frac{\partial \dot{y}_r}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \tag{I-5}$$

同时,由于 $y_r = y_r(q_i)$, 则有

$$\dot{y}_r = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_r}{\partial q_i} \dot{q}_i \text{ 和 } \frac{\partial \dot{y}_r}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y_r}{\partial q_i}$$

代入式(I-5)的第一式,得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{r=1}^j M_r \dot{y}_r \frac{\partial y_r}{\partial q_i} \tag{I-6}$$

将式(I-5)的第二式和上式代入式(I-3),得

$$\delta W_{in} = - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i \tag{I-7}$$

再将式(I-2)和式(I-7)代入式(I-1),得

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial W_c}{\partial q_i} - \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \tag{I-8}$$

由于 δq_i 是任意的,彼此独立。故有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial W_c}{\partial q_i} &= \frac{\partial W_e}{\partial q_i} \\
(i = 1, 2, 3, \dots, N)
\end{aligned} \tag{I-9}$$

这就是拉格朗日方程的一般形式。

引入 Lagrange 函数

$$L = T - V$$

后,式(1-9)可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial W_e}{\partial q_i} + \frac{\partial W_c}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (I-10)$$

对于无阻尼和无外界干扰力的弹性结构体系,拉格朗日方程变为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (I-11)$$

对于连续体系,式(1-4)的动能可描述成积分的形式,即

$$T = \frac{1}{2} \int_l m(x) [\dot{y}(x, t)]^2 dx \quad (I-12)$$

式中,结构的位移函数 $y(x, t) = \sum_n \varphi_n(x) q_n(t)$ 。

拉格朗日方程常应用于建立有限自由度系统的运动微分方程。

附录 II 哈密尔顿(Hamilton)原理

1. 变分的概念

假设某一变量 q 随自变量 t 而变化,即

$$q = q(t) \quad (II-1)$$

相应的微分为

$$dq = \dot{q} dt \quad (II-2)$$

如果 q 代表单自由度系统的广义坐标, t 表示时间,则微分 dq 表示在 dt 时间内发生的位移增量。

图 II-1 中 $q(t)$ 表示了某一函数

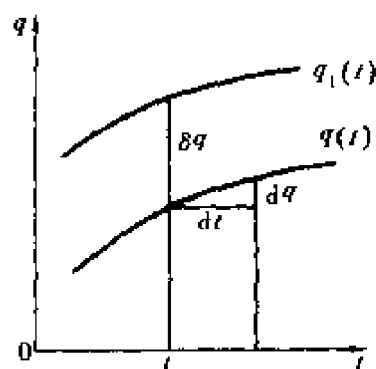


图 II-1 微分与变分

的几何曲线。假如在固定自变量 t 后, 给 $q(t)$ 作微小的改变而得到另一条和它无限接近的新的光滑曲线 $q_1(t)$, 这种由于函数本身无限小的变化而引起的改变量 δq 称为变分, 即

$$\delta q = q_1 - q \quad (\text{II-3})$$

变分是基于自变量不变而函数本身的改变而得到的函数的任意改变量, 与微分的概念有着本质的区别。

变分与微分运算是互不相关的, 它们的次序可以互换, 而且, 在不改变积分上、下限的条件下, 积分运算和变分运算也是可以互换的, 即

$$\left. \begin{aligned} d\delta q &= \delta dq \\ \frac{d}{dt}\delta q &= \delta \frac{dq}{dt} = \delta \dot{q} \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} q dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta q dt \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-4})$$

2. 哈密尔顿变分原理

由附录 I 可知, Lagrange 函数

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (\text{II-5})$$

对上式变分, 有

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (\text{II-6})$$

暂不计非势力的作用, 由式(I-8)可得

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \quad (\text{II-7})$$

如用 Lagrange 函数, 上式可表示为

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \quad (\text{II-8})$$

根据微分与变分运算的次序可互换性质, 有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

代入式(II-8), 有

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] = 0 \quad (\text{II-9})$$

再根据式(II-6),上式又可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \delta L \quad (\text{II-10})$$

或写成微分形式为

$$d \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \delta L dt$$

因为研究体系是在给定两个运动状态 $A(t=t_1)$ 和 $B(t=t_2)$ 之间的运动,故对上式自 t_1 到 t_2 进行积分,得

$$\left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \quad (\text{II-11})$$

由于在 A 和 B 两点的运动状态已经给定,故有

$$(\delta q_i)_A = (\delta q_i)_B = 0 \quad (\text{II-12})$$

从而得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta H = 0 \quad (\text{II-13})$$

上式即为哈密尔顿变分原理的数学表达式,其含义为:

对于有势力作用下的完整质点系而言,在所有由 A 状态到 B 状态的可能运动中,唯有真实运动使哈密尔顿作用量具有极值,即泛函 H 的变分为零。

若系统除有势力作用外,还有非势力的作用,将这部分力的虚功记作

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (\text{II-14})$$

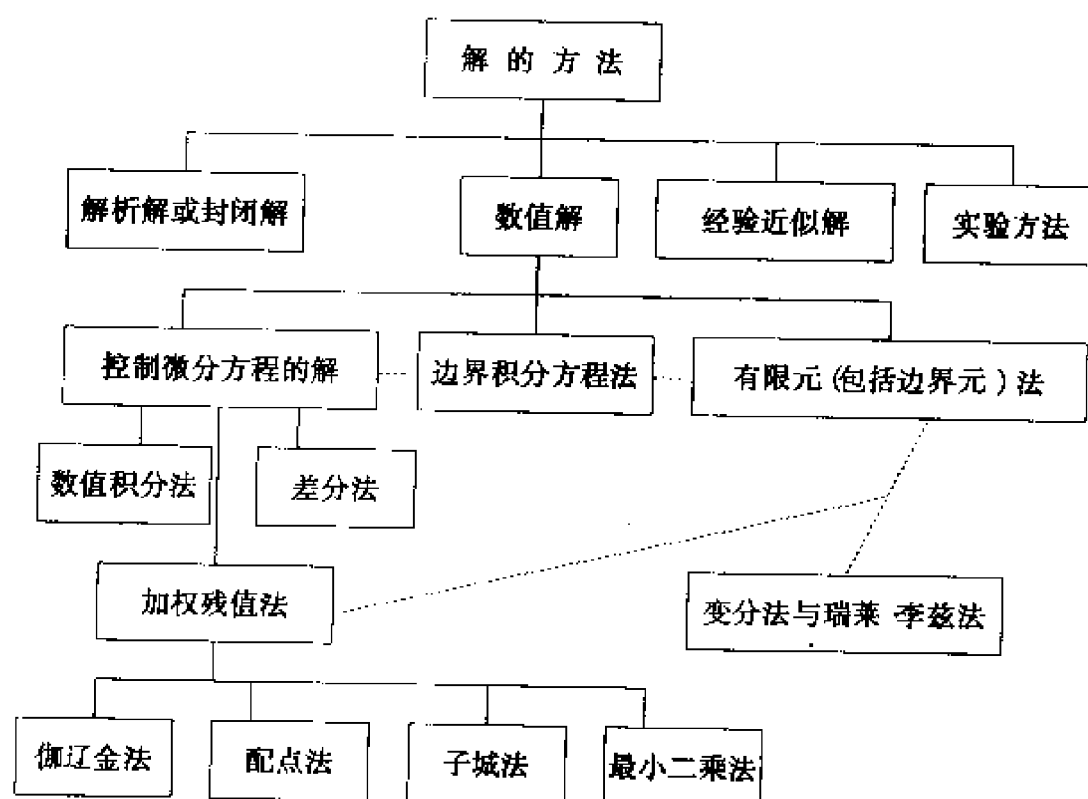
则不难证明,哈密尔顿原理可表达为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (\text{II-15})$$

哈密尔顿原理经常应用于建立连续弹性体的运动微分方程。

可以证明,哈密尔顿原理与拉格朗日方程是可以互相推证的。

附录 III 公路桥梁动力学解法一览



参考文献

1. 俞载道. 结构动力学基础. 上海: 同济大学出版社, 1987
2. 李国豪. 桥梁结构稳定与振动. 北京: 中国铁道出版社, 1996
3. 项海帆. 刘光栋. 拱结构的稳定与振动. 北京: 人民交通出版社, 1991
4. John M. Biggs. Introduction to Structural Dynamics. Mc Graw-Hill, Inc. USA, 1964
5. 清华大学工程力学系固体力学教研室振动组编. 机械振动. 北京: 机械工业出版社, 1980
6. 李国豪. 工程结构抗震动力学. 上海: 上海科学技术出版社, 1980
7. 中华人民共和国交通部标准. 公路工程抗震设计规范 (JTJ004—89). 北京: 人民交通出版社, 1990
8. 范立础. 桥梁抗震. 上海: 同济大学出版社, 1997
9. Kovacs I Zur Frage der Seilschwingungen und die Seildampfung Bautechnik V59 H10, 1982
10. 毛鸿银, 项海帆. 悬索桥施工猫道的动力特性分析. 上海: 同济大学学报, 1998(4)
11. Hiroshi Zui et al. Practical Formulas for Estimation of Cable Tension by Vibration Method. Journal of Structural Engineering, June 1996
12. 亢战, 钟万勰. 斜拉桥参数共振问题的数值研究. 北京: 土木工程学报, 1998(8)
13. 宋一凡, 周彦军, 贺拴海. 钢筋混凝土梁的动刚度分析. 西安: 西安公路交通大学学报, 1998(4B)
14. 宋一凡. 预应力钢梁桥的动力分析. 西安: 西安公路交通大学学报, 2000(4)